Revista Matemática e Educação

UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA

Prof. Dr. Alfredo José Machado Neto
Reitor

Prof. Dr. João Baptista Comparini
Vice-Reitor

Prof. Dr. José Alfredo de Pádua Guerra
Pró-Reitor de Administração

Profa. Dra. Sheila Fernandes Pimenta e Oliveira
Pró-reitora Acadêmica

Profa. Dra. Melissa Franchini Cavalcanti Bandos
Pró-Reitora de Extensão

Prof. Ms. Cyro de Almeida Durigan
Chefe de Departamento do curso de Administração

Prof. Ms. Orivaldo Donzelli
Chefe de Departamento do curso de Ciências Contábeis

Profa. Dra. Fúlvia Nassif Jorge Facury
Chefe de Departamento do curso de Comunicação Social-Publicidade e Propaganda

Profa. Dra. Maria de Fátima Aveiro Colares
Chefe de Departamento do curso de Psicologia

Profa. Dra. Maria Eloisa de Souza Ivan
Chefe de Departamento do curso de Letras

Profa. Dra. Silvia Regina Viel
Chefe de Departamento do curso de Matemática

Prof. Dr. Daniel Facciolo Pires
Chefe de Departamento de Computação

Prof. Dr. Flávio Henrique Costa
Chefe do Departamento do curso de Engenharia da Produção

Prof. Ms. Anderson Fabrício Mendes
Chefe do Departamento do curso de Engenharia Civil

Prof. Dr. Frederico Alonso Sabino de Freitas
Chefe do Departamento do curso de Medicina

Profa. Dra. Marinês Santana Justo Smith
Coordenador de Pós-Graduação Stricto-Sensu

Prof. Dr. Silvio Carvalho Neto
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

UNI-FACEF CENTRO UNIVERSITÁRIO MUNICIPAL DE FRANCA

Revista Matemática e Educação

ISSN 2175-4667

Revista Matemática e Educação	Franca	v.1	n.13	p.9-144	2023

Revista Matemática e Educação
Departamento de Matemática – Uni-FACEF
Av. Ismael Alonso y Alonso 2400 – Bairro São José
14401-135 – Franca – SP
http://www.facef.com.br

Comissão Editorial e Editores Responsáveis

Ananda Kainne Oliveira Domenegueti Xavier
Adriana Aparecida Silvestre Gera Ribeiro
Antônio Carlos da Silva Filho
Letícia Faleiros Chaves Rodrigues
Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho
Silvia Regina Viel

O conteúdo apresentado nesta revista é de responsabilidade exclusiva de seus autores.

Capa
Beatriz Oliveira Facirolli

Revista Matemática e Educação / Uni-FACEF Centro Universitário Municipal de Franca. v.1 , n.13 (2023). – Franca (SP): Uni-FACEF, 2023.

Publicação Anual

ISSN 2175-4667

1. Matemática 2. Educação – Matemática 3. Periódicos I – Uni-FACEF Centro Universitário Municipal de Franca

CDD 510

Uni-FACEF – Centro Universitário Municipal de Franca
ABEC - Associação Brasileira de Editores Científicos

PREFÁCIO

Olá Leitor, você sabe qual a importância da Matemática e onde ela se aplica? Conhece pesquisas recentes sobre Matemática? Então, você encontrou um ótimo local para ler sobre esses assuntos. Pensar em pesquisa e Matemática é o foco da Revista Matemática e Educação, trabalho do nosso Departamento.

Neste número, que é fruto de trabalhos acadêmicos dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Uni-FACEF, vamos tratar de temas como a importância da formação dos professores, e dos recursos didáticos para o ensino da Matemática, voltados aos alunos com deficiência visual. Outro assunto é o uso da metodologia ativa no ensino de Matemática, uma discussão interessante, que ganhou espaço com a chegada desta nova possibilidade para as salas de aula.

E para você que gosta de aprender sobre os números, esta edição apresenta um estudo dos inteiros de Gauss e os números primos complexos, um texto bem organizado, que traz uma retrospectiva histórico-matemática. Já o artigo que trata sobre os grafos e os algoritmos para calcular os menores caminhos possíveis, mostra uma aplicação atual que une Matemática do dia-a-dia e as tecnologias. Apresentamos como um outro trabalho muito importante o que versa sobre as correlações entre multifractalidade, volatilidade e previsões em série temporais financeiras, que também tem foco no mundo de hoje.

Para fechar as discussões, apresentamos o trabalho: educação sexual e o que tem o professor de Matemática a ver com isso? Nele se explora o papel do professor de forma ampla e o uso da etnomatemática na sala de aula.

Vale ressaltar, mais uma vez, que esta revista é fruto do empenho e dedicação de uma equipe e por isso agradecemos de forma especial a todo corpo docente e administrativo da instituição, que viabilizaram esta publicação.

Boa Leitura!

Cordialmente

Silvia Regina Viel
Chefe do Departamento de Matemática
Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF

SUMÁRIO

A IMPORTÂNCIA DA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES E DOS RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ALUNOS COM DEFICIÊNCIA VISUAL 09

EDUCAÇÃO SEXUAL: o que tem o professor de matemática a ver com isso? 39

GRAFOS: algoritmos para calcular os menores caminhos 58

INTEIROS DE GAUSS: os números primos Complexos 92

METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: experiências e visões de alguns professores 101

POSSÍVEIS CORRELAÇÕES ENTRE MULTIFRACTALIDADE, VOLATILIDADE E PREVISÕES EM SÉRIE TEMPORAIS FINANCEIRAS .. 128

A IMPORTÂNCIA DA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES E DOS RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ALUNOS COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Rafaella Sousa Machado
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
rafaellasm18@gmail.com

Thamires Araujo Lima
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
limaaraujothamires@gmail.com

Profa. Ms. Adriana Aparecida Silvestre Gera Ribeiro
Mestre em Psicologia – Uni-FACEF
dricaasg@hotmail.com

1 Introdução

Nota-se nas escolas que quando se tem algum aluno com deficiência visual (DV), ele não recebe o mesmo ensino que os alunos que enxergam recebem e os professores não conseguem auxiliá-lo de forma adequada devido às circunstâncias que a educação enfrenta como salas cheias, escassez de recursos didáticos e falta apoio governamental.

Sendo assim, levando em consideração o atual cenário da educação, os recursos disponíveis e a formação dos professores, é imprescindível pesquisar sobre o ensino da Matemática para deficientes visuais em escolas regulares, pois conhecendo mais sobre esse tema, será possível, de alguma forma, ampliar as estratégias de ensino para ajudar alunos com deficiência visual (DV).

Vale ressaltar ainda que é importante pesquisar sobre a formação dos professores de Matemática, buscando saber se os conteúdos trabalhados nas disciplinas dos cursos de graduação proporcionam aos graduandos bagagem adequada sobre como lidar com o aluno com DV, mostrando a diferença entre os graus

de deficiência visual e as diferentes formas de se ensinar esses alunos de acordo com suas necessidades, apresentando recursos didáticos e tecnológicos disponíveis para o ensino da Matemática, assim como proporcionando o conhecimento da legislação referente ao acesso desses alunos à educação, entre outros.

2 História da deficiência visual no mundo e no Brasil

No mundo antigo, era raro na sociedade a participação de pessoas que apresentavam algum tipo de deficiência e ocorria somente quando nasciam em famílias ricas, sendo a maioria considerada invisível perante a sociedade. Contudo, alguns exemplos podem ser observados de contribuições culturais como, por exemplo, o poeta Homero que era deficiente visual e deixou o trabalho de Ilíada e a Odisseia (DE MELLO, 2019).

Já Sêneca, famoso intelectual romano, cita em sua obra De Ira que pessoas “monstruosas” ou “com defeitos” precisariam ser sacrificadas como animais que nascem com alguma deformidade. Ainda, os povos hebreus não sacrificavam as pessoas deficientes, porém condenava-as a morte espiritual (MARTINS, 2015).

Somente no período da idade média, diferentemente do clero radical que ainda consideravam pessoas com deficiência como “coisas malignas”, o clero ocidental começou a considerar pessoas que apresentavam deficiência como filho de Deus o que abriu espaço de caridade na religião (SILVA, 1987).

A partir do século IV, alguns indivíduos se manifestaram sobre a realidade das pessoas que tinham deficiência visual para tentar realizar uma educação social e, também, um processo de inclusão. Um exemplo é de Valentin Haüy que ao assistir uma apresentação produzida com inúmeras pessoas com deficiência visual ficou abalado e, com seu espírito humanístico, começou a lutar pelos direitos dos deficientes visuais e, em 1786, foi fundado o Instituto Nacional dos Cegos (INJA), a primeira escola para cegos

(DE MELLO, 2019).

Em 1821, o adolescente Louis Braille participou como voluntário em uma apresentação de criação para métodos de comunicação para deficientes visuais com pontos em relevo, onde rapidamente compreendeu o método de Barbier. Embora o sistema de Barbier nunca tenha sido usado no INJA, ele foi alicerce aos trabalhos desenvolvidos por Louis Braille, onde a primeira obra escrita no sistema Braille foi em 1825 (CERQUEIRA, 2009).

No Brasil, a educação especial se inicia em 1835, no período em que o político conservador Diego Antônio Feijó estava no poder, o qual simplesmente arquivou o projeto de lei que ofertava ensino aos deficientes visuais e auditivos na capital do império e das províncias (DE MELLO; MACHADO, 2017).

Através da influência do médico da corte que tinha uma filha deficiente visual em conjunto com o presidente da Província do Rio de Janeiro, conseguiram abrir as portas ao jovem José Álvares Azevedo para que ele tivesse uma audiência com o imperador. Nessa audiência, o Imperador D. Pedro II se encantou com o sistema Braille e a cegueira deixou de ser considerada uma desgraça (LANNA JÚNIOR, 2010).

Em 1854, no Brasil criou-se o Imperial Instituto dos Meninos Cegos, sendo a primeira instituição da América Latina a realizar atendimento com pessoas que tinham deficiência visual e, atualmente, esta é conhecida como Instituto Benjamin Constant. Contudo, a educação para pessoas com deficiência visual se inicia de forma improvisada devido às verbas para seu funcionamento, sendo necessário uma parceria pública e privada, no qual o Decreto n° 1.428 definiu um número de bolsas para alunos considerados em condições de pobreza (BRASIL, 1854).

Com o início da República, o processo de mudança na educação especial continuava muito lento e quase desprezível nos primeiros decretos republicanos. Após a abertura do Instituto Benjamin Constant (IBC), foram inauguradas algumas instituições

nos mesmos moldes para atendimentos aos cegos no país (GATTI, 2016).

No governo Getúlio Vargas há a reestruturação do IBC que passou a ser mais visível na sociedade, com atendimentos médicos para a comunidade. Além disso, a legislação incentivava pesquisa pedagógica e médica para melhorar o ensino de pessoas com deficiência visual e combater a cegueira preventiva (DE MELLO; MACHADO, 2017).

O Ministério de Educação e Cultura (MEC) surgiu no Brasil em 1953 e o sistema educacional brasileiro até 1960 era centralizado e seu modelo seguido por todos os estados e, em 1961, foram criadas as Diretrizes e Bases da Educação Nacional que evidenciava o caráter de integração das classes especiais (BRASIL, 1961).

Com as mudanças políticas, a educação especial sofreu inúmeras alterações com decretos e criaram várias frentes pedagógicas como salas de recursos multifuncionais, as capacitações, a educação infantil 100% inclusivas, entre outras que estruturaram a educação especial no país (DE MELLO; MACHADO, 2017).

3 Formação dos professores de Matemática

Em toda a origem da raça humana na Terra, todos os seres humanos se diferenciam entre si, seja no gênero, faixa etária, pensamentos e fatores de limitação como, por exemplo, na capacidade física, sensorial ou cognitiva. Dentre essas diferenciações, podemos citar a deficiência visual, que é caracterizada pela visão baixa ou inexistente (MAIOR, 2015), sendo conceituado pela:

> 1. Incapacidade de orientar-se, por si mesmo, em locais que frequentam habitualmente; 2. Perda completa e

> definitiva da visão de ambos os olhos; 3. A acuidade visual bilateral menor que 1:10, e/ou redução acentuada no campo de visão; 4. A acuidade visual de 1:10 ou menos, com a melhor correção possível ou menos de 20° de campo de visão (MONTE, 2014, p. 125).

Além desses conceitos, a Organização Mundial da Saúde (2019) definiu que há cinco diferentes graus de deficiência visual que estão descritos na Tabela 1.

Tabela 1 - Classificação da gravidade da deficiência visual com base na acuidade visual no olho menor.

Categoria	Acuidade visual no olho menor	
	Pior que	Igual ou melhor que
Deficiência visual leve	6/12	6/18
Deficiência visual moderada	6/18	6/60
Deficiência visual grave	6/60	3/60
Cegueira	3/60	
Deficiência visual de perto	N6 ou M 0,8 a 40 cm	

Fonte: OMS, 2019, p.11.

Portanto, pessoas que apresentam deficiência visual possuem um desafio significativamente maior para aprender em todas as fases do período escolar, resultando em baixo nível de desempenho educacional e de autoestima, quando comparadas a pessoas que possuem visão adequada. Dessa forma, torna-se necessário realizar uma adaptação dessas pessoas, proporcionando condições acessíveis em todas as esferas de sua vida, incluindo o aprendizado e o crescimento profissional (AUGESTAD, 2017).

Considerando que a Matemática é uma disciplina essencial para o desenvolvimento básico e ajuda os indivíduos a desenvolverem pensamento crítico e reflexivo, há uma

preocupação significativa em relação ao seu ensino para alunos com deficiência visual, sendo necessário oferecer meios para que as crianças e adolescentes com essa deficiência consigam adquirir o conhecimento necessário. Para isso, é necessário que os professores tenham uma capacitação adequada e conheçam metodologias que são acessíveis para o ensino e para a aplicação de vários conteúdos matemáticos (BARBOSA et al., 2020).

No atual cenário da educação brasileira, diversas mudanças veem ocorrendo nas escolas como novos recursos tecnológicos, o perfil dos alunos e dos professores e, consequentemente, o processo ensino-aprendizagem, entre outros fatores. Mas há algo que vem chamando a atenção: a inclusão, a qual levanta vários questionamentos. Como os profissionais da educação podem trabalhar com esses alunos? Como é a aprendizagem de alunos com necessidades educacionais especiais em uma classe regular? Quais estratégias o professor pode utilizar para ensinar esses alunos?

São muitos questionamentos já feitos e que são feitos até hoje. Mas o ponto inicial para amenizar um pouco dessas dúvidas é a formação dos professores, o quão a formação é importante para que se possa atender as necessidades que o aluno especial tem. Para isso, o professor não deve apenas formar e ficar estagnado, mas a sua formação deve ser continuada, ele deve sempre se aperfeiçoar, contribuindo assim para o melhor ensino de qualquer aluno que estiver ali.

Por isso é importante ressaltar que a formação dos professores, de acordo com Baumel e Castro (2002, apud DALL'ACQUA, 2007, p.116), é uma:

> [...] área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da didática e da organização escolar, estuda os processos por meio dos quais os professores, em formação ou em exercício, individualmente ou em equipe, em experiências de

> aprendizagem por meio das quais adquirem ou melhoram os conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem.

Especificamente, para um aluno deficiente visual ou de baixa visão não é fácil aprender a Matemática, visto que essa disciplina, muitas vezes, é concretizada visualmente na prática. Então, este aluno terá dificuldades quando estiver em uma sala regular. Segundo Grifin e Gerber (1996, apud MOLLOSSI; MENESTRINA; MANDLER, 2014, p. 289):

> As crianças videntes aprendem a palavra impressa num processo gradual. Esse domínio é geralmente ajudado por figuras e várias informações do contexto. Para a criança cega essas informações não existem. Para aprender Braille, as crianças cegas precisam memorizar várias configurações dos pontos da cela Braille. Não há padrões fáceis de palavras que elas possam decorar.

Sendo assim, a falta de especialização e de conhecimento por parte do professor das potencialidades dos alunos DV podem criar barreiras que atrapalham sua prática docente e, consequentemente, atrapalham também o rendimento e o aprendizado desses alunos, dificultando cada vez mais a inclusão.

Reis, Eufrázio e Bazon (2010) ainda pontuam que grande parte dos professores não teve nem formação inicial e nem formação continuada voltada para atender alunos com necessidades educacionais especiais e, consequentemente, esses professores que lecionam em cursos de graduação em licenciatura também não preparam seus alunos graduandos para incluir estudantes com deficiência.

Pimentel (2012 apud MOURA; LINS, 2015) acrescenta que a falta de formação específica em relação às especificidades de cada

tipo de deficiência, a falta de conhecimento das potencialidades dos seus alunos e a falta de flexibilidade do currículo são fatores que podem criar barreiras nas atitudes e na prática do professor, levando-o a se distanciar das reais necessidades dos seus alunos e gerando certa resistência à inclusão. O autor ainda pontua que essa falta de formação específica pode gerar o que ele denomina de pseudoinclusão, ou seja, o aluno deficiente está matriculado na escola regular, porém não está devidamente incluído no processo de aprendizagem daquele grupo.

Pimentel (2012 apud MOURA; LINS, 2015) ainda destaca que para que a inclusão realmente aconteça e para que haja equidade no atendimento pedagógico é necessário o apoio dos professores. Sendo assim, a formação docente deve possibilitar ao professor habilidades para o respeito e a compreensão das diversidades.

Pimentel (2012 apud MOURA; LINS, 2015) também afirma que o professor precisa investir nas potencialidades de aprendizagem de seus alunos, atendendo as suas necessidades e propondo atividades que favoreçam o seu desenvolvimento. Contudo, ainda ressalta que, como não há um perfil único das deficiências, é necessário que haja um acompanhamento mais individualizado e contínuo que envolve tanto a família como o docente e até mesmo outros profissionais, já que as deficiências não podem ser tratadas genericamente, uma vez que se deve considerar a condição resultante da interação da pessoa com o seu ambiente. Além disso, é importante que a escola se informe sobre as especificidades de cada deficiência atendida por esta e sobre os meios adequados para fazer com que o educando encontre no ambiente escolar um contexto que proporcione aprendizado e desenvolvimento em todos os aspectos: afetivo, social, cognitivo e psicomotor, e sem que haja discriminação por este possuir seu próprio tempo e ritmo de aprender.

Fica evidente, então, sobre a formação do professor

no que se refere à inclusão de alunos com necessidades educacionais especiais, incluindo os alunos com deficiência visual, que é necessário que o docente possua um rol de saberes que envolvem não só as epistemologias que fundamentam o processo de aprendizagem, mas também que possuam habilidades e competências sobre mediação pedagógica no processo de ensinar, possibilitando, assim, que o que o aluno compreende e faz hoje com ajuda do professor, este possa compreender e fazer amanhã, sozinho, ideias estas baseadas na teoria de Vygotsky (1998).

4 Recursos didáticos para deficientes visuais

Baumel e Castro (2003 apud PRANE; LEITE; PALMEIRA, 2011, p. 4) afirmam que "materiais e recursos são condicionantes de uma relação pedagógica eficaz, de respostas à inclusão dos deficientes visuais e de todos os alunos no processo escolar".

Sá (2007 apud FARIAS, 2011) salienta que os recursos destinados ao atendimento educacional de alunos com necessidades especiais devem ser inseridos em situações e vivências cotidianas, as quais devem estimular a exploração e o desenvolvimento dos outros sentidos. "A variedade, a adequação e a qualidade dos recursos disponíveis possibilitam o acesso ao conhecimento, à comunicação e à aprendizagem significativa" (SÁ, 2007 apud FARIAS, 2011, p. 30).

Especificamente em relação à educação de alunos deficientes visuais, vale salientar que, de acordo com Cerqueira e Ferreira (2000 apud PRANE; LEITE; PALMEIRA, 2011), os recursos didáticos assumem uma relevante importância, uma vez que a carência de materiais adequados pode conduzir a aprendizagem do deficiente visual a um mero verbalismo, desvinculado da realidade; a formação de conceitos depende do íntimo contato do aluno com as coisas do mundo; e alguns recursos podem suprir lacunas na aquisição de informações pelo aluno deficiente visual.

Sá (2007 apud FARIAS, 2011) também afirma que, para alunos com deficiência visual, é indispensável que os recursos didáticos possuam estímulos visuais e táteis que atendam às diferentes condições visuais, promovendo assim uma melhor comunicação e integração entre os alunos, tanto deficientes quanto videntes. Para tanto, é necessário que os materiais tenham cores contrastantes, texturas e tamanhos adequados e diferenciados para que realmente se tornem úteis e significativos, cabendo ao professor selecionar, criar ou adaptar os tais recursos.

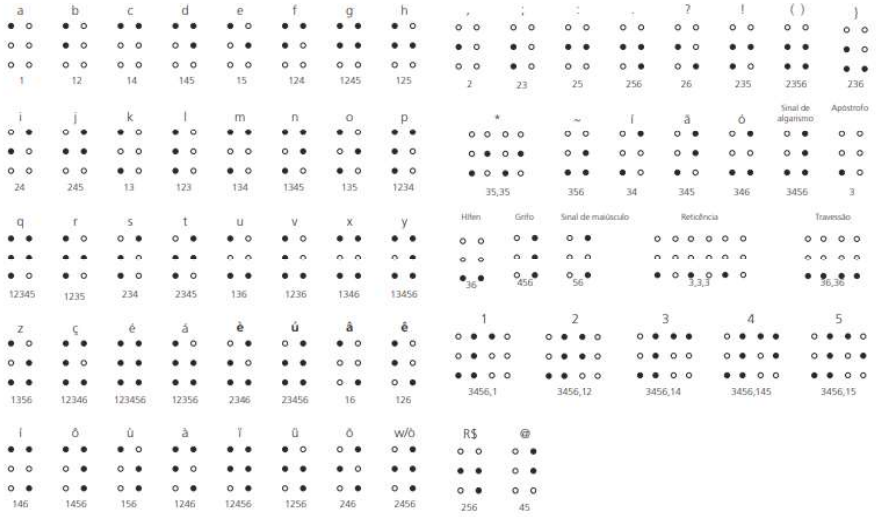
Para o ensino da Matemática, há alguns materiais didáticos que podem ser usados para auxiliar as aulas ministradas para pessoas com DV, tanto para baixa visão quanto totalmente cegos. Além disso, segundo Araújo e Marszaukoski (2009, p. 4), esses "recursos tecnológicos, equipamentos e jogos pedagógicos contribuem para que as situações de aprendizagem sejam agradáveis e motivadoras para alunos com limitação visual". Ou seja, estes são adaptados para facilitar a aprendizagem conforme as necessidades especiais desses alunos (BATISTA; MIRANDA, 2015).

Alguns desses exemplos são o Braile, o Geoplano, o Soroban e o Multiplano que serão descritos nesse artigo.

4.1 Braile

Um dos principais recursos criados para auxiliar as pessoas com DV foi o Sistema Braile, criado pelo Louis Braille no século XIX na França. O Braile é um sistema criado para auxiliar na escrita e leitura de pessoas com DV, sendo utilizado 6 pontos de relevo distribuídos em duas colunas para formar 63 símbolos diferentes que são usados tanto em textos literários quanto na disciplina de matemática nas suas simbologias, conforme mostrado na figura 1.

Figura 1 - Principais símbolos em Braile



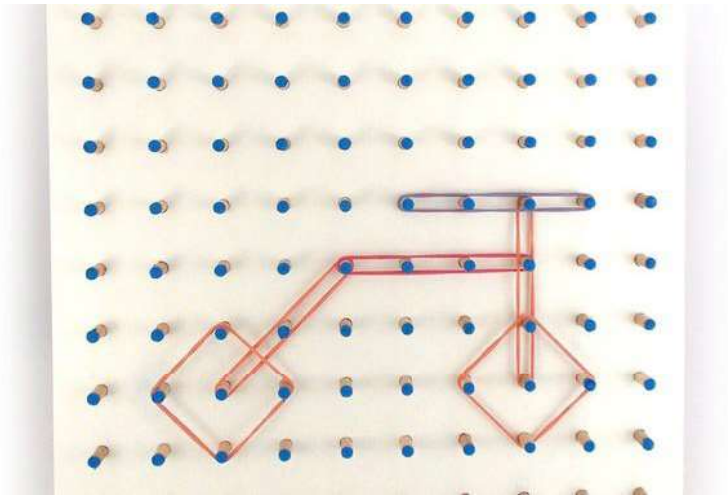
Fonte: BRASIL, 2007, p.41-42.

Embora o Braile apresente algumas simbologias próprias de números e símbolos, é necessário adaptá-lo em algumas especificidades da Matemática como, por exemplo, uma simbologia própria, tornando um desafio tanto para o aluno quanto para o professor que usa essas modificações para que o aluno compreenda os conteúdos dessa disciplina (BATISTA; MIRANDA, 2015).

4.2 Geoplano

O Geoplano, mostrado na figura 2, é um recurso dinâmico e manipulativo que permite os alunos DV construir, movimentar, fazer e desfazer, auxiliando na exploração de recursos geométricos e algébricos, além de auxiliar a exploração espacial, permitindo comparar, relacionar, discriminar e identificar sequencias em operações de frações, simetria, reflexão, rotação e translação, área e perímetro, com foco voltado a compreensão da abstração e dos seus conhecimentos (MACHADO, 2004).

Figura 2 – Geoplano

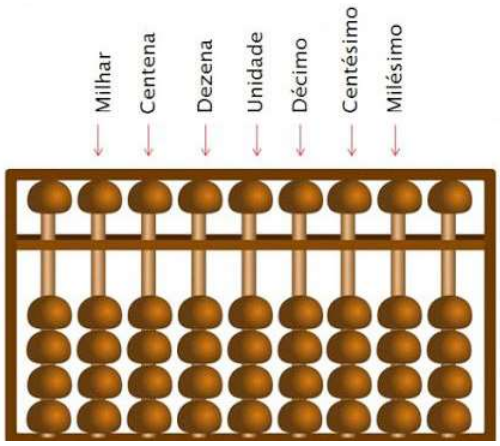


Fonte: ELO7, 2021, p.1.

4.3 Soroban

O soroban, mostrado na figura 3, é um instrumento usado para realizar cálculos de adição, subtração, multiplicação, divisão e outras operações. Seu uso estimula a habilidade numérica, a capacidade da concentração, da memória, de raciocínio lógico, da agilidade mental e do processamento das informações ordenadamente (BATISTA; MIRANDA, 2015).

Figura 3 – Soroban

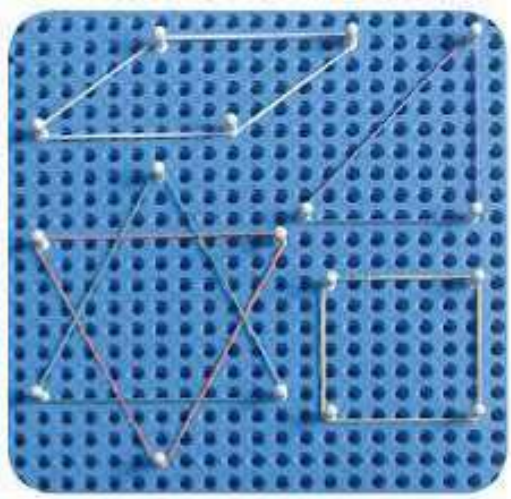


Fonte: PROFESSORA ANGELA, 2017, p.1.

4.4 Multiplano

O multiplano, mostrado na figura 4, é construído com uma placa perfurada com linhas e colunas, no qual os furos possuem mesma distância. Normalmente, esse recurso é usado na matemática para auxiliar alunos com DV a assimilarem função e terem noção de construção gráfica. Nos furos, há a presença de pinos com cabeça planar e circular e, em sua superfície, há indicação numérica e em algarismo arábico, permitindo que ele seja manipulável tanto por pessoas com DV como pessoas que não apresentam problemas de visão (BATISTA; MIRANDA, 2015; MACHADO, 2004).

Figura 4 - Multiplano



Fonte: MULTIPLANO, 2016, p.1.

Diante do exposto acima, o objetivo do presente artigo é mostrar a importância da formação dos professores de Matemática e dos recursos didáticos para o ensino de Matemática para alunos com deficiência visual (DV). Os objetivos específicos que permeiam este estudo são: mostrar o quanto a formação dos professores influencia a sua prática docente; e mostrar quais os recursos didáticos disponíveis que ajudam os professores de Matemática

a ensinar os conteúdos matemáticos para alunos com DV e, consequentemente, auxiliam na inclusão e aprendizagem desses alunos.

A pertinência do presente trabalho reside no fato de que, apesar do tema inclusão ser frequentemente abordado e discutido, a formação de professores e, especificamente, a formação de professores de Matemática, carece de um maior aprofundamento no que se refere a saberes relacionados ao ensino dessa disciplina para alunos deficientes visuais tanto em relação aos conteúdos matemáticos e sua didática, quanto relacionados à organização da classe e produção de materiais.

5 Metodologia

Inicialmente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre o tema em questão e, posteriormente, uma pesquisa de campo por meio de entrevistas semiestruturas com professores de Matemática que ministram aulas no Ensino Fundamental II e/ou no Ensino Médio para alunos com deficiência visual (DV).

5.1 Participantes

Participaram da presente pesquisa três professoras de Matemática de escolas públicas da cidade de Franca – SP que ministram aulas no Ensino Fundamental II e/ou no Ensino Médio para alunos com deficiência visual. As professoras foram nomeadas de Professora 1, Professora 2 e Professora 3.

5.2 Aspectos Éticos

Antes de realizar a pesquisa de campo, o projeto passou pela apreciação do Comitê de Ética, para garantir a não maleficência da pesquisa e que os sujeitos participantes não sejam prejudicados.

Após a aprovação do projeto de pesquisa pelo Comitê de Ética do Centro Universitário Municipal de Franca (Uni-FACEF), de acordo a Resolução nº. 466/12, versão 2012, da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa do Ministério da Saúde, as autoras do presente artigo entraram em contato com professores de Matemática, os quais fazem parte do ciclo social das pesquisadoras e através destes foi indicada uma professora que ministra aulas de Matemática em uma escola pública para um aluno deficiente visual. Então, entrou-se em contato com essa professora para explicar os objetivos da pesquisa e convidá-la a participar do estudo. Diante da aceitação em participar da pesquisa, foi enviado via WhatsApp o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), o qual deixa claro sobre o sigilo em relação à identificação da participante e à garantia de que esta poderia receber esclarecimentos em qualquer etapa do trabalho, ressaltando que a participante poderia se recusar a continuar participando da pesquisa, sem qualquer prejuízo a ela.

É imprescindível ressaltar que o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) foi assinado e após a assinatura do termo em questão, foi agendada a entrevista de acordo com a disponibilidade da participante e das pesquisadoras.

A posteriori, as pesquisadoras realizaram, por intermédio da técnica de amostragem “snowball”, cuja qual, visa facilitar o acesso ao grupo da pesquisa, solicitando a participante inaugural que indicasse outros(as) professores(as) de Matemática do Ensino Fundamental II e/ou Ensino Médio que ministram ou já ministraram aula para deficientes visuais e constituintes de seu âmbito social, assim sendo, foi realizado com estes(as) o mesmo procedimento descrito.

Vale salientar que devido ao cenário atual, foi realizada duas entrevistas presenciais e uma online, via Zoom.

5.3 Instrumentos

Para a coleta de dados foi utilizado um roteiro de entrevista semiestruturada contendo 17 perguntas, o qual foi elaborado pelas pesquisadoras com a ajuda da orientadora e que foi aplicado nas professoras de Matemática participantes da pesquisa que ministram aulas no Ensino Fundamental II e/ou Ensino Médio para alunos com deficiência visual.

5.4 Procedimentos Metodológicos

5.4.1 Coleta de dados

A coleta de dados foi realizada por meio de um roteiro de entrevista semiestruturada, a qual foi agendada em data e horário de acordo com a disponibilidade das participantes e das pesquisadoras.

5.4.2 Análise dos dados

Após a realização das entrevistas, a análise dos dados foi realizada com a utilização do método qualitativo, visto que são perguntas abertas. Para a análise qualitativa dos resultados, as perguntas abertas são classificadas quanto às respostas.

De acordo com os autores Martins e Bicudo (2005), a metodologia da pesquisa qualitativa deve ser, ao mesmo tempo, de natureza teórica e prática. As teorias que o pesquisador aprende sobre observações empíricas e as experiências por ele vividas no processo devem constituir o seu ponto de partida de interpretação. Essas duas aprendizagens fornecem a instrumentação para observar e analisar a realidade de modo teórico desde o início.

Para a coleta e análise dos dados, os autores dizem que:

> O conhecimento desejado é a essência do fenômeno. Esse fim é alcançado através das descrições ingênuas, ou seja, não interpretadas, do mesmo. Assim, as instruções dadas aos sujeitos que falarão sobre o fenômeno não podem sugerir ou indicar o que é buscado (MARTINS e BICUDO, 2005, p. 36).

A análise das perguntas abertas foi realizada de acordo com os quatro momentos do método da análise do fenômeno, concebido por Martins e Bicudo (2005), sendo estes:

1. Ler a descrição, relato ou entrevista do princípio ao fim sem buscar interpretar nada, somente com o objetivo de ter uma noção total do que ali está exposto;
2. Reler o texto tantas vezes quanto for necessário para discriminação das unidades de significados que são anotadas diretamente na descrição, ressaltando a importância de que as unidades não estão explicitas no texto Importante lembrar que as unidades de significado não estão prontas no texto, mas existem somente em relação à atitude, disposição e perspectiva do pesquisador;
3. Após discriminar as unidades de significado é preciso transformar as descrições ingênuas feitas pelos sujeitos em uma linguagem psicológica, ou seja, uma reflexão para caracterizar, criando categorias de análise. Nesse passo, o pesquisador vai percorrer as unidades de significado encontradas para expressar o insight psicológico nelas contido;
4. Sintetizar e concretizar todas as unidades de significado transformadas em uma descrição consistente da estrutura situada do fenômeno.

Após elencar em categorias relacionadas ao critério

de interpretação as perguntas da entrevista, será realizada uma comparação entre os dois grupos analisados na presente pesquisa, para que assim seja possível uma conclusão a partir dos resultados esperados.

6 Discussão dos resultados

A discussão dos resultados foi elaborada relacionando os resultados obtidos nas entrevistas semiestruturadas com a teoria, fazendo assim uma conexão entre a parte teórica e a parte prática.

6.1 Formação x Educação Especial

Essa categoria tem como objetivo mostrar se durante e/ou após a graduação das participantes da pesquisa, elas tiveram uma adequada preparação para atender alunos com necessidades educacionais especiais, mais especificamente para lecionar Matemática para alunos deficientes visuais. A categoria também tem o objetivo de mostrar a opinião das entrevistadas a respeito da importância da formação acadêmica para a prática docente do professor de Matemática no que se refere aos alunos com deficiência visual.

No que se refere à graduação, duas das participantes afirmaram que tiveram alguns conteúdos voltados para necessidades educacionais especiais, porém nada aprofundado e nada específico voltado para a deficiência visual. A outra professora afirmou que não teve disciplinas voltadas para esse assunto. Porém, vale ressaltar que duas entrevistadas, por também terem cursado Pedagogia, afirmaram terem tido a oportunidade de ampliar e aprofundar seu conhecimento sobre o assunto nesse curso.

> Tinha algumas coisas, mas nada muito aprofundado, mas soube mais na faculdade de Pedagogia. Não teve nada

> na formação para ajudar alunos com Deficiência, por isso todos os docentes encontram dificuldades e os alunos com D. V. não gostam de matemática. (Professora 1)
>
> Teve a disciplina que se chamava Didática Matemática, mas não voltada tanto para alunos com D.V. (Professora 2)
>
> Não teve, só tive na Pedagogia. (Professora 3)

Em relação à formação após terem se graduado, apenas uma das professoras afirmou ter feito curso de especialização na área de Educação Especial e curso de especialização específico para o ensino de conteúdos matemáticos para deficientes visuais.

> Fiz pós-graduação de Educação Especial que abrange todas as disciplinas, foi aí que enfatizei mais sobre os recursos e os conteúdos específicos. E fiz um curso em uma instituição de Especializada em D.V., para ter mais suporte, aula prática, estágios, entre outros. [...] curso de Soroban, curso de Código Matemático em Braille. (Professora 1)
>
> Na área de educação especial não, fiz especialização na área de matemática mesmo, depois pedagogia. (Professora 2)
>
> Não em educação especial. (Professora 3)

No que se refere à importância da formação acadêmica para a prática docente do professor de Matemática ao ensinar alunos com deficiência visual, todas as entrevistadas, sem exceção, afirmaram que a formação acadêmica é muito importante.

> Fundamental na perspectiva de inclusão, os cursos de graduação deveriam investir em capacitações de inclusão, o que se garante é que o aluno permaneça no ensino regular, mas os professores chegam despreparados. (Professora 1)

> Importantíssima, o professor tem que ter a dinâmica, olhar especial para isso, pois a formação é muito importante. (Professora 2)
>
> Formação é a base, as coisas ficam apenas na teoria e devem ser na prática. (Professora 3)

Os resultados obtidos na presente pesquisa corroboram o que é apontado por Reis, Eufrázio e Bazon (2010) no que se refere à formação inicial e continuada dos professores, uma vez que esses autores pontuam que os docentes carecem de preparo para atender alunos com necessidades educacionais especiais.

Pimentel (2012 apud MOURA; LINS, 2015) também enfatiza que a falta de formação específica pode levar a pseudoinclusão, criando assim barreiras nas atitudes e na prática do professor, distanciando-o das reais necessidades dos seus alunos e gerando certa resistência à inclusão. Sendo assim, para que a inclusão realmente aconteça, é necessário que a formação docente possibilite ao professor habilidades para o respeito e a compreensão das diversidades.

6.2 Experiência e dificuldades enfrentadas frente à alunos deficientes visuais em salas regulares

Essa categoria tem o objetivo de mostrar a experiência das participantes com alunos deficientes visuais e as maiores dificuldades enfrentadas por elas no ensino dos conteúdos matemáticos para esse tipo de estudante.

Das três entrevistadas, uma afirmou ter um maior tempo experiência no que se refere à prática docente com alunos deficientes visuais. As outras duas pontuaram ter certa experiência, porém por um tempo menor.

> Toda a vida. Trabalhei numa sociedade com pessoas com D.V., trabalhei com uma professora cega. A minha vida sempre foi voltada para o apoio dessas pessoas, já faz 25 anos. (Professora 1)

> Tive uma aluna em 2013, do 2º ano do Ensino Médio. Dei aula de física e tive muita dificuldade para ensinar, tinha material e a aluna sabia o braille, e utilizava o material que o governo disponibiliza. Eu não sabia o braille e tinha uma professora que sabia e ajudava nessa questão. Agora dou aula para o Gabriel, dei aula no 6º, 7º e 8º ano e ele não sabe o braille, ele faz parte da sala de recurso, a professora da sala de recurso estava ensinando o braille pra ele, mas ele ainda não aprendeu, as coisas para ele têm que ser tudo material palpável. (Professora 2)

> Professora 3 - Dei aula para um aluno no 6º, 7º, 8º e dou no 9º, 4 anos. Dei EVA para ele manipular, recortei símbolos para ele manusear.

No que se refere às mudanças provocadas e às dificuldades enfrentadas pelas professoras em sala de aula regular devido à presença de alunos com deficiência visual, apenas uma afirmou que foi necessário fazer mudanças para conseguir conciliar os alunos visuais e o aluno D.V. Esta também pontuou que a maior dificuldade reside na quebra de preconceitos. As outras duas disseram que não foram necessárias mudanças, uma vez que são os amigos de sala que os ajudam nas tarefas escolares. Também destacaram que a maior dificuldade está na falta de recursos didáticos adequados à deficiência dos estudantes em questão.

> Na sala regular muda muitas coisas, pois o professor não sabe lidar, pois exige estratégias para que consiga conciliar os alunos visuais e os não visuais. A maior dificuldade é quebrar a barreira de preconceito com o aluno que tem deficiência, pois o professor não sabe lidar. (Professora 1)

> [...] os alunos já o conheciam dos anos anteriores e não provocou nenhuma mudança. Os alunos o ajudam. Falta de material e o preparo para essas aulas, para adaptar o

> material, apesar do Gabriel acompanhar a turma, ele não consegue ir para o nível difícil. (Professora 2)
>
> Ele veio de uma escola com os mesmos amigos, e os amigos cuidam dele. Falta de materiais, de uma professora de apoio, creio que deveria ter notebooks para esse aluno conseguir acompanhar o conteúdo. (Professora 3)

Brito (2005 apud PRANE; LEITE; PALMEIRA, 2011) em uma pesquisa realizada sobre os recursos didáticos disponíveis para alunos com deficiência visual constatou que há uma escassez de material adaptado. A autora afirma que "existem poucas traduções de livros didáticos na linguagem Braille e os materiais didáticos são insuficientes [...] Em virtude desse quadro, intui-se que o DV sente-se excluído da rede regular de ensino" (p. 4).

6.3 Recursos humanos e didáticos para o ensino da matemática para alunos com deficiência visual

Essa categoria tem o objetivo de mostrar os recursos humanos e didáticos disponibilizados pelo sistema educacional para o ensino dos conteúdos matemáticos para os alunos deficientes visuais.

Em relação aos recursos humanos, ou seja, à ajuda dos professores de apoio, todas as entrevistadas afirmaram que os seus alunos com DV ou já tiveram ou ainda têm algum tipo de professor extra, seja uma professora de apoio, uma professora da sala de recursos ou um monitor para auxiliar no processo ensino-aprendizagem.

> Agora tem os professores auxiliares, mas sem formação específica. A sala de recursos tenta fazer o intercâmbio, para que o aluno aprenda. (Professora 1)
>
> Ele teve a professora de apoio, mas no 6º ano não teve a professora de apoio. Em todos os anos sempre preparo

> as atividades, antes ela mesmo fazia as adequações com os materiais. (Professora 2)
>
> Ele tem uma professora da sala de recursos da diretoria e um como monitor. (Professora 3)

Já no que se refere aos recursos didáticos, todas as professoras ressaltaram que estes são muito importantes para auxiliar no processo ensino-aprendizagem dos alunos com deficiência visual, pois muitos desses recursos permitem que esses alunos manipulem objetos que facilitam a compreensão dos conteúdos matemáticos. Também afirmaram que já tiveram que adaptar ou produzir materiais para ajudar na explicação dos conteúdos. Porém, apenas uma das professoras disse que faz uso desses recursos com maior frequência. As outras duas participantes disseram que fazem uso dos recursos com menor frequência, sendo que uma delas alegou que é difícil trazer materiais diferenciados em todas as aulas, pois as classes são numerosas e há muitas outras tarefas a serem cumpridas pelos professores.

> Acredito e muito, pois é o que faz a diferença, pois são com esses recursos que o aluno consegue saber o que é um gráfico. O tempo todo tem que ser produzido materiais, fazendo adaptações para que o aluno tenha o concreto. (Professora 1)
>
> Sim, pois o aluno evolui muito mais rápido do que ele já sabe, pois se ele tivesse um notebook em mãos, teria mais estímulo. A PA produz materiais e levam para casa dele ou fazem aulas online. [...] os materiais que prepara as aulas, carretilha, material de alto relevo. [...] Agora um pouco menos, faço adaptação e a PA que faz as outras adaptações com alto relevo. (professora 2)
>
> Sim, o D. V. só consegue entender com o concreto para manipular [...] como relógios estragados, para fazer circunferência. [...] Não muito, pois temos sala com 40 alunos, muita coisa para fazer e todos os dias não dá para fazer algo diferenciado. (Professora 3)

Em relação aos recursos didáticos disponibilizados pelas escolas para ensinar Matemática aos alunos deficientes visuais, duas das participantes afirmaram que as escolas possuem alguns recursos, mas que não são suficientes. Já a outra professora acredita que a escola não possui e que depende muito mais da criatividade do professor adaptar e/ou criar tais recursos.

> Possuem alguns recursos, doações, mas falta a capacitação humana. (Professora 1)
>
> Ele tem a sala de recurso que pode frequentar, e tem a professora da sala, tem a máquina de braille, chegou materiais para ajudar o aluno, mas não sei quais e em sala de aula não tem. (Professora 2)
>
> Não possui, vai da criatividade do professor. (Professora 3)

Os relatos das professoras entrevistadas corroboram o que é pontuado por Sá (2007 apud FARIAS, 2011) sobre a importância de os recursos didáticos serem inseridos em situações e vivências cotidianas e de que estes devem estimular a exploração e o desenvolvimento dos outros sentidos, possibilitando assim uma aprendizagem significativa. Além disso, o autor também salienta, assim como as professoras entrevistadas, que, para alunos deficientes visuais, é necessário que os recursos didáticos possuam estímulos visuais e táteis que atendam às suas diferentes condições, promovendo assim uma melhor comunicação e integração entre os alunos.

6.4 A verdadeira inclusão e o papel do professor frente ao aluno com deficiência visual

Essa categoria tem o objetivo de mostrar a opinião das participantes no que se refere ao seu papel enquanto professora

de um aluno com deficiência visual e o que eles acreditam que seria necessário para que a inclusão desses alunos realmente acontecesse de forma adequada.

Duas entrevistadas ressaltaram que seu papel frente aos alunos com DV é muito importante, sendo que uma delas destacou o quão gratificante é quando os alunos avançam, mas também salientou que se sente frustrada quando percebe que os alunos não aprenderam. Já a outra professora afirmou que se sente incapaz, pois não possui os recursos necessários para ensiná-los.

> É uma responsabilidade grande e que você tem olho e enxerga e a sua informação vai depender para saber ensinar o aluno, pois 80% da nossa informação é visual e o aluno cego não. (Professora 1)
>
> É uma profissão muito bonita e importante, mas com D.V. quando você vê que ele teve um avanço é uma sensação sem igual, mas quando eu saia e ele não entendia saia frustrada, pois dou aula para os alunos e sinto que não estou sendo 100% preparada, pois precisamos de preparo. (Professora 2)
>
> Incapaz de realizar algo, pois não tenho recursos suficientes. (Professora 3)

Em relação ao que as participantes acreditam ser necessário para que a inclusão de alunos deficientes visuais realmente aconteça de adequada, todas pontuaram a necessidade de uma melhor qualificação e da disponibilidade de mais recursos.

> A formação do professor, os recursos voltados para a sala do ensino regular para esses alunos, formação do professor fazer especializações. (Professora 1)
>
> Hoje não é uma inclusão, os professores não são preparados, não há recursos, todos os profissionais são despreparados. (Professora 2)
>
> Primeiramente, ver a questão da qualificação dos

> professores e posteriormente os materiais pedagógicos especializados. (Professora 3)

O que foi exposto pela fala das participantes também é pontuado por Moura e Lins (2015), as quais afirmam que os professores, de modo geral, não possuem a formação necessária para desenvolver um trabalho em uma perspectiva inclusiva, uma vez que sua formação inicial é baseada em um modelo tradicional que não os prepara para o trabalho em suas salas de aula regulares com alunos com necessidades educacionais especiais.

Em uma pesquisa realizada por Reis, Eufrázio e Bazon (2010), verificou-se que a preparação dos professores para atender a alunos com necessidades educacionais especiais é essencial para que o processo ensino-aprendizagem seja concretizado. Sendo assim, as autoras afirmam que a implantação de disciplinas referentes à educação inclusiva na grade curricular dos graduandos em licenciatura e o investimento em formação continuada, seja por interesse do próprio professor, seja por incentivo do governo ou por instituições de ensino, é de grande relevância.

7 Considerações Finais

Com todas as informações trazidas pelo artigo, pode-se concluir que a educação para os deficientes visuais vem sendo discutida e moldada a muitos anos. É um assunto que evidencia aspectos importantes, que mostra que existe sim recursos didáticos capazes de auxiliar no processo ensino-aprendizagem desses alunos, porém é uma área que necessita urgentemente de intervenção, pois por mais que existam leis que garantam uma educação de qualidade para esse grupo específico, ainda assim observa-se que não é isso que acontece na prática e nota-se um despreparo muito grande dos profissionais em relação aos deficientes visuais.

Contudo, é importante que se discuta as causas relacionadas a esse despreparo, observá-las, identificá-las e corrigi-las torna-se imprescindível, pois, como os relatos das entrevistadas evidenciaram, é preciso investir nos recursos didáticos específicos, mas principalmente, é imprescindível investir na formação dos professores, uma vez que sem a qualificação adequada o profissional se sente impotente e incapaz de oferecer ao aluno o aprendizado que ele merece.

Com isso, é importantíssimo que exista um olhar mais atencioso para a educação com os deficientes visuais, tanto dos governantes quanto da equipe escolar para que a educação de qualidade seja oferecida o mais rápido possível para esses alunos através do preparo dos professores, dos recursos didáticos e de toda uma equipe empenhada em contribuir para que esses alunos realmente desenvolvam o seu potencial e tenham uma aprendizagem significativa.

Referências

ARAÚJO, A. L. L.; MARSZAUKOWSKI, F. Matemática e a deficiência visual. In: IX Semana de Iniciação Científica. IX Mostra de Pós-Graduação FAIVIUV. **Anais** [...]. 2009.

AUGESTAD, L. B. Self-concepts and self-esteem among children and young adults with visual impairment: A systematic Review. **Cogent Psychology**, v. 4, n. 1, p. 1- 19, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/316291890_Self-concept_and_self-esteem_among_children_and_young_adults_with_visual_impairment_A_systematic_review. Acesso em: 20 jul. 2021.

BARBOSA, Francisco Cleiton Barbosa et al. Propostas de ensino de matemática para deficientes visuais: revisão sistemática exploratória da literatura. **Holos**, v. 8, n. 36, p. 1-37, 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/349355942_PROPOSTAS_DE_ENSINO_DE_MATEMATICA_PARA_DEFICIENTES_VISUAIS_REVISAO_SISTEMATICA_EXPLORATORIA_DA_LITERATURA. Acesso em: 18 jul. 2021.

BATISTA, Josiel de Oliveira.; MIRANDA, Patrick Batista. O uso de material didático no ensino da matemática para o aluno deficiente

visual. In: I JORNADA DE ESTUDOS EM MATEMÁTICA. **Anais** [...]. Marabá, 2015. Disponível em: https://jem.unifesspa.edu.br/images/Anais/v1_2015/CC_20150984002_O_uso_de_materiais.pdf. Acesso em: 25 jul. 2021

BRASIL. **Curso de capacitação da escrita do sistema braile para docentes do SENAI**. Brasília: Manual e Caderno de Lições do Aluno, 2007. Disponível em: https://docplayer.com.br/17744842-Curso-de-capacitacao-da-escrita-do-sistema-braille-para-docentes-do-senai-manual-e-caderno-de-licoes-do-aluno.html. Acesso em: 27 jun. 2021.

BRASIL. Decreto n° 1.428, de 12 de setembro de 1854. **Coleção de Leis do Império do Brasil – 1854**. Brasil, 1854.

_____. Decreto n° 4.024, de 20 de dezembro de 1961. **Ementa: Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (1961)**. Brasil, 1961.

CERQUEIRA, Jonir Bechara. O legado de Louis Braille. **Revista Benjamin Constant**, v. 2, p. 1-14, 2009. Disponível em: http://revista.ibc.gov.br/index.php/BC/article/view/440. Acesso em: 10 ago. 2021.

DALL' ACQUA, Maria Júlia Canazza. Atuação de professores do ensino itinerante face à inclusão de crianças com baixa visão na educação infantil. **Pandéia**, v. 17, n. 36, p. 115-122, 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/paideia/a/z3yLBTsGMtgZv3MNZ7ZQrBQ/?lang=pt. Acesso em: 15 ago. 2021.

DE MELLO, Humberto Bethoven Pessoa. Da invisibilidade à visibilidade: uma reflexão histórica acerca do lugar do deficiente visual na sociedade. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. 6. **Anais** [...]. Fortaleza: CONEDU, 2019. Disponível em: http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/59783. Acesso em: 20 set. 2021.

DE MELLO, Humberto; MACHADO, Sídio. A formação histórica da educação para cegos no Brasil: uma análise contextualizada das leis do Império à República. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO INCLUSIVA: O ensino e a aprendizagem em discussão. 1. **Anais** [...]. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2017. Disponível em: https://ebooks.pucrs.br/edipucrs/anais/i-seminario-luso-brasileiro-de-educacao-inclusiva/assets/artigos/eixo-1/completo-2.pdf. Acesso em: 15 set. 2021

ELO7. **Geoplano**. 2021. Disponível em: https://www.elo7.com.br/geoplano/dp/124315F. Acesso em: 01 jun. 2021.

FARIAS, Vanusa Moreira. A importância da atuação do professor frente a inclusão do aluno cego. 2011, 62 f. (Monografia de Especialização em Desenvolvimento Humano, Educação e Inclusão). Faculdade UAB/UNB, Alexânia – GO, 2011.

LANNA JÚNIOR, Márcio Cléber Martins. **História do movimento político das pessoas com deficiência no Brasil**. Brasília: Secretaria de Direitos Humanos. Secretaria Nacional de Promoção dos Direitos de Pessoas com Deficiência, 2010. Disponível em: https://www.al.sp.gov.br/repositorio/bibliotecaDigital/21097_arquivo.pdf. Acesso em: 11 out. 2021.

MACHADO, Rosa Maria. Minicurso: Explorando o Geoplano. In: II BIENAL DA SBM. **Anais** [...]. Bahia, 2004. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf. Acesso em: 15 mar 2021.

MAIOR, Izabel. **História, conceito e tipos de deficiência**. 2015. Disponível em: http://violenciaedeficiencia.sedpcd.sp.gov.br/pdf/textosApoio/Texto1.pdf. Acesso em: 05 maio 2021.

MARTINS, Joel; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **A pesquisa qualitativa em psicologia: fundamentos e recursos básicos**. 5. ed. São Paulo: Educ/Moraes, 2005.

MARTINS, Lúcia de Araújo Ramos. **História da educação de pessoas com deficiência**: da antiguidade ao início do século XXI. Campinas: Mercado de Letras, 2015.

MONTE, F. **Níveis de deficiência visual**: diferentes necessidades. In: DE LIRA, A. K. M.; FROTA, A. M. M. C. Inclusão de alunos com deficiência na Universidade Federal do Ceará. Fortaleza: Edições UFC, 2014.

MOLLOSSI, Luí Fellippe da Silva Bellicantta.; MENESTRINA, Tatiana Comiotto; MANDLER, Marnei Luiz. **Dificuldades em aprender matemática**: análise de entrevistas com discentes com deficiência visual. SIMPEMAD, p. 280-293, 2014.

MOURA, Andréa de Andrade; LINS, Abigail Fregni. A formação dos professores de matemática para trabalhar na perspectiva inclusiva com alunos deficientes visuais. **II CONEDU – Congresso Nacional de Educação**, 2015. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2015/TRABALHO_EV045_MD1_SA8_ID199_08092015181310.pdf. Acesso em: 03 nov. 2021.

MULTIPLANO Produtos Educacionais. **Figuras Geométricas**. 2016. Disponível em: http://multiplano.com.br/2016/08/26/figuras-geometricas/. Acesso em: 01 jun. 2021.

OMS. **Relatório Mundial sobre a Visão**. 2019. Disponível em: https://apps.who.int/iris/bitstream/handle/10665/328717/9789241516570-por.pdf. Acesso em: 05 maio 2021.

PRANE, Bruna Zution Dalle; LEITE, Hellen Castro Almeida; PALMEIRA, Cátia Aparecida. Matemática para deficientes visuais no ensino médio regular: desafios, possibilidades e perspectivas. **XIII Conferência Interameriacana de Educação Matemática**, Recife, 26 a 30 jun. 2011.

PROFESSORA ANGELA. **Conheça o Soroban: uma calculadora para pessoas com deficiência visual**. 2017. Disponível em: http://www.professoraangela.com.br/site/ler.php?id=14. Acesso em: 01 jun. 2021.

REIS, Michele Xavier dos; EUFRÁSIO, Daniela Aparecida; BAZON, Fernanda Vilhena Mafra. A formação do professor para o ensino superior: prática docente com alunos com deficiência visual. **Educação em Revista**, v. 26, n. 1, p. 111-130, 2010. Disponível em: https://www.scielo.br/j/edur/a/JsFd7XXWkxWWfnMzKXMPqGR/?format=pdf&lang=pt
Acesso em: 02 nov. 2021.

SILVA, O. M. **A pessoa deficiente na história do mundo de ontem e de hoje**. São Paulo: CEDAS, 1987.

VYGOTSKY, Lev Semionovich. **Formação social da mente**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

EDUCAÇÃO SEXUAL: o que tem o professor de matemática a ver com isso?

Letícia Rafaela Herculino Quintiliano
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
le.herculino13@gmail.com

Profa. Dra Valéria Beghelli Ferreira
Doutora em Serviço Social – Uni-FACEF
valbeghelli@yahoo.com.br

1 Introdução

O objetivo da educação sexual na escola consiste em colocar professores com um preparo adequado para desempenhar de forma significativa seu papel, orientando os alunos a superarem suas dúvidas, ansiedades e angústias. Percebe-se que mesmo com o desenvolvimento da tecnologia, abrindo portas para o acesso à informação, alcançando várias classes sociais, o assunto Educação Sexual ainda é visto como um grande tabu na sociedade, no meio familiar e nas escolas, espaço em que poderia ser abordado este assunto, uma vez que é pautado dentro do currículo escolar (ALMEIDA; COSTA; SILVA, 2005).

> As questões relativas à sexualidade ainda provocam tremores, já que estamos tratando de um diálogo entre diferentes gerações, e os pais nem sempre compreendem que seus valores e ideias não vão mais de encontro às necessidades de seus filhos. É certo que a preocupação da maioria dos pais é proteger os filhos de uma vida sexual frustrante. E muitos talvez os façam por experiência própria, só que à carga de tabus e preconceitos que eles carregam, criam determinadas imposições que acabam com o diálogo, e prejudicam cada vez mais a relação entre pais e filhos (ALMEIDA; COSTA; SILVA, 2005, p.53).

Para Castro; Abramovay; Silva (2004), além de ser escasso o assunto sobre sexualidade nas escolas, este quando

é tratado, aborda grande parte do ponto de vista biológico e não leva em consideração toda parte social, cultural, comportamental e psicológica que está envolvida.

Sabe - se que o Brasil é um país com características tradicionais e machistas, consequência de todo um imperialismo vivido desde as grandes imigrações. Segundo Foucault (2004) o termo sexualidade sofre tanta repressão e com o decorrer da história, toda essa opressão ganhou força e mais forma, porque em tempos remotos, nenhuma criança e jovem poderiam tocar no assunto sem incomodar quem estivesse ouvindo. Segundo o autor, para muitos adultos, falar sobre sexo com crianças e jovens era uma forma de incentivar ao ato, que independente se era certo ou errado, o jovem, um dia virando adulto, iria desfrutar do prazer.

Almeida; Costa; Silva, (2005) complementando esta discussão ressaltam que sem o acesso a informações e orientações sobre sexualidade, jovens, podem ter comportamentos sexuais de risco e contribuir para a gravidez na adolescência ou para infecções sexualmente transmissíveis.

> A desqualificação do discurso dos jovens leva a sociedade a tratá-los como indivíduos que não podem falar por si. Dessa maneira, a mídia, a religião e diversos campos de conhecimento disputam a hegemonia de uma discursividade sobre a juventude. Quando lhes é dada a palavra, é apenas simbolicamente, uma vez que a fala é controlada, selecionada, para conter o perigo que ela pode advir (SALES, 2001, p. 27).

Almeida; Costa; Silva (2005) ressaltam que falar de sexualidade vai muito além de falar sobre o ato sexual, para os autores, é preciso desmistificar essa ideia tradicional e errônea, e explicar que falar sobre é fazer com que o jovem entenda como nasceu, conhecer o seu corpo, evitar abusos sexuais, porque se explicará os limites e cuidados, falar sobre sentimentos e responsabilidades afetivas com o outro.

Complementando esta discussão, Leal; Saito (2000) abordam esses aspectos, ressaltando a preocupação com as situações de risco geradas pelo ato sexual e, também, as formas pejorativas de se tratar o tema.

> O exercício da sexualidade na adolescência poderá constituir risco variável para o projeto de vida e até da própria vida, bastando para isso lembrar consequências como: gravidez precoce, aborto, AIDS e outras doenças sexualmente transmissíveis. Quando se considera a gravidez na adolescência, torna-se cada vez mais clara a importância da educação sexual na prevenção de fatores de risco. Para a realização dessa proposta serão convocados todos os segmentos da sociedade. Mas, se a meta é educar, informar ou melhor ainda, formar, a escola destaca-se entre os grupos de referência por ser esta a sua função precípua. Alguns princípios básicos deverão ser estabelecidos para que a atuação dos educadores tenha êxito. Talvez, dentre eles, o mais importante seja não basear a orientação sexual apenas no uso de preservativos e anticoncepcionais, mas, sim, no resgate do indivíduo enquanto sujeito de suas ações, o que favorece o desenvolvimento da cidadania, do respeito, do compromisso, do autocuidado e do cuidado com o outro." (LEAL; SAITO, 2000, p. 44)

Pensando no papel do professor neste contexto SILVA; (2016) afirma que o educador deve estar preparado para lidar com essas questões, evitando opiniões pessoais e reconhecendo a importância de se falar sobre o assunto dentro das instituições. Para a autora, os professores devem se qualificar, pesquisar e obter informações para melhor lidar com os discentes de forma adequada em cada fase do seu desenvolvimento.

Se dentro das escolas a escassez do assunto é um fato, como poderá o jovem, no momento atual, diante de um bombardeio de informações midiáticas e de influenciadores digitais, conseguir orientações responsáveis sobre questões de sexualidade? Além disso, será que apenas o professor de ciências é responsável

em debater o assunto? Os professores estão preparados para responder e ou abordar o assunto de forma empática, coerente e inclusiva? O professor de matemática, pode atuar sobre isso? E como? São estas inquietações que justificaram a busca deste estudo.

Neste sentido, sendo professor de matemática ou de qualquer outra área, os processos de formação e qualificação para trabalhar temas relacionados à sexualidade humana são necessários e importantes para lidar com situações que virão dentro de uma sala de aula.

este estudo teve por objetivo possibilitar uma reflexão sobre o papel do professor de matemática no contexto da educação sexual na escola, além de compreender o que é educação sexual; compreender como funciona o debate sobre sexualidade no meio escolar; discutir o papel do docente no processo de educação sexual e identificar as possibilidades do professor de matemática trabalhar com o tema.

Este estudo foi uma revisão narrativa que objetivou conhecer o que a literatura discute, sobre como a educação sexual é abordada no contexto escolar e o que o professor de matemática tem a ver com isso.

A pesquisa bibliográfica foi realizada em fontes reconhecidas de dados, tais como, Scientific Eletronic Library Online (SciELO), Literatura Latino Americana e do Caribe em Ciências da Saúde (LILACS), periódicos de licenciatura, livros, que deram dar suporte teórico ao tema. A busca do material teórico se deu pelas palavras chaves: Educação Sexual, Sexualidade Escola; Matemática e Educação Sexual; Formação do Professor e Educação Sexual.

Algumas questões norteadoras foram formuladas para embasar a elaboração desse trabalho “se dentro das escolas a escassez do assunto é um fato, como poderá o jovem, no momento atual, diante um bombardeio de informações midiáticas e de influenciadores digitais, conseguir orientações responsáveis sobre

questões de sexualidade? Além disso, será que apenas o professor de ciências é responsável em debater o assunto? Os professores estão preparados para responder e ou abordar o assunto de forma empática, coerente e inclusiva? O professor de matemática, pode atuar sobre isso?

Portanto este estudo traz a compreensão da educação sexual no contexto escolar e a participação do docente de matemática neste contexto, a fim de trazer em pauta a importância do assunto e possibilitar ampliar esse processo educativo tão necessário ao jovem na contemporaneidade, buscando comportamento sexual mais responsável, afetivo e saudável.

2 Educação Sexual

Educação sexual é o termo utilizado para nomear o processo que busca proporcionar conhecimento e esclarecer dúvidas sobre o assunto sexualidade, que envolve o conhecimento do próprio corpo, sentimentos, desejos e anseios, sexo, proteção, orientação sexual, prevenção de infecções sexualmente transmissíveis e a gravidez na adolescência (MAIA; RIBEIRO; 2011).

> A educação sexual na escola deve ser um processo intencional, planejado e organizado que vise proporcionar ao aluno uma formação que envolva conhecimento, reflexão e questionamento; mudança de atitudes, concepções e valores; produção e desenvolvimento de uma cidadania ativa; e instrumentalização para o combate à homofobia e à discriminação de gênero (MAIA; RIBEIRO, 2011, p. 13).

Ribeiro; Reis (2007) apontam que, tempos atrás, trabalhava-se a sexualidade não porque se acreditava ser esta importante para o desenvolvimento integral do indivíduo, mas porque as pessoas começaram a ter a visão de que a educação sexual deveria ser discutida de uma forma que tratasse dos problemas que estavam

aparecendo, na época como: a gravidez na adolescência, o uso de drogas por adolescentes e devido à preocupação de pais e educadores com o avanço e aparecimento da AIDS, que começava a ameaçar também aos jovens e mudar todos os conceitos e maneiras de vivenciarem a própria sexualidade.

A Organização das Nações Unidas (ONU, 2007) considera que a educação sexual está relacionada à promoção de direitos humanos – direitos das crianças e jovens e o direito que toda pessoa tem à saúde, educação, informação e não discriminação. Por isso, a ONU é favorável à implementação de um currículo para educação sexual nas escolas:

> Educação sexual é um programa de ensino sobre os aspectos cognitivos, emocionais, físicos e sociais da sexualidade. Seu objetivo é equipar crianças e jovens com o conhecimento, habilidades, atitudes e valores que os empoderem para: vivenciar sua saúde, bem estar e dignidade; desenvolver relacionamentos sociais e sexuais respeitosos; considerar como suas escolhas afetam o bem estar próprio e dos outros; entender e garantir a proteção de seus direitos ao longo da vida (UNAIDS, 2018, p. 17).

Pontes (2011) aponta como definição de sexualidade a "qualidade do que é sexual", sendo sexual o que é "relativo ao sexo; que tem sexo; que caracteriza o sexo". A autora também traz recente edição do Dicionário da Língua Portuguesa que define sexualidade como as "características morfológicas, fisiológicas e psicológicas relacionadas com o sexo". Mas não foi apenas nas páginas dos dicionários que o conceito de sexualidade se transformou e evoluiu. Segundo a autora, esse conceito tem sofrido inúmeras e profundas metamorfoses ao longo do tempo, acompanhando as transformações históricas e sociais e impulsionando muitas delas.

> Definir sexualidade resulta, pois, numa tarefa extremamente complexa. De facto, a sexualidade, dada a importância que assume no contexto da existência

> humana, surge imbuída num intrincado conjunto de dimensões, problemáticas e disciplinas diversas que se dedicam ao seu estudo. Não pode ser de forma alguma perspectivada como imutável, quer em termos pessoais quer em termos sociais ou históricos. Isto porque, por um lado, a sexualidade varia de forma significativa ao longo do ciclo de vida, podendo ser experienciada de forma diferente em função da idade, classe, etnia, capacidade física, orientação sexual, religião e região (PONTES, 2011, p.24).

Para a autora, nenhuma educação sexual visa ensinar ou estimular que os alunos pratiquem algum tipo de ato sexual em si.

Figueiró (2010) aponta que a educação sexual amparada no resgate histórico e cultural também sustenta a abordagem definida como emancipatória ou libertadora, que reconhece a tal estratégia como instrumento de busca de felicidade e transformação dos padrões de relacionamento sexual.

Para a autora, nesse entendimento, o educador não deve limitar-se ao conhecimento de informações científicas descontextualizadas da realidade em que vivem os sujeitos., devendo ter uma abordagem emancipatória que valoriza tanto o aspecto informativo quanto o formativo, considerando o contexto em que vivem os sujeitos, com vistas a auxiliar a compreensão das normas sexuais como construção social, atentando-se para o respeito à diversidade sexual e de gênero e para o alcance dos direitos sexuais e reprodutivos, possibilitando, assim, uma vivência da sexualidade com liberdade e responsabilidade.

Para Althusser (1985) apud Fernandes; Correira; Lages (2016), em pleno século XXI é comum deparar-se com dúvidas dos mais diversos graus acerca dos temas envoltos na Educação Sexual. Para as autoras, por se tratarem de adolescente em todo o vigor da puberdade, sempre estão repletos de questionamentos, onde inúmeras vezes não tem o apoio familiar, incumbindo a escola o papel de esclarecer tais dúvidas. Contudo, muitas instituições ainda

se fundamentam na concepção de que este tema deve ser debatido exclusivamente no seio familiar, não nas salas de aula, evidenciando que a qualidade da instrução educacional está corrompida, já que o ensino reproduz práticas coercivas e repreensivas (ALTHUSSER, 1985, apud FERNANDES; CORREIRA; LAGES, 2016).

Portanto, segundo ressaltam Fernandes; Correira; Lages (2016) educar sexualmente é competência de todos. Para as autoras, é preciso contextualizar, debater e disseminar conhecimentos sem incluir crenças pessoais, proporcionando uma reflexão coerente, e não uma coerção ou repreensão, buscando uma formação social e pessoal dos adolescentes, reduzindo a distorção e vulgarização de informações tão essenciais.

3 Sexualidade e a Escola

O debate sobre sexualidade no meio escolar é de extrema importância para preparar jovens e adolescentes para uma vida sexual segura e saudável e cuidar do seu próprio corpo e bem estar.

Saito, 2008 apud Vieira; Matsukura (2017) destacam que a escola, enquanto grupo de referência e espaço de significativa importância no processo de construção do ser humano, têm muitas potencialidades para que sejam trabalhadas com os adolescentes, questões como sexualidade, drogas, projetos de vida, entre outras, valendo-se do respeito à autonomia e reconhecimento das capacidades dos adolescentes.

As autoras destacam que as práticas de educação sexual nas escolas podem promover o diálogo, a troca de experiências e informações, maior autonomia quanto ao exercício da sexualidade e podem contribuir positivamente com a saúde integral dos educandos e reduzir as possíveis consequências indesejáveis advindas das vivências sexuais.

Biancon (2009) aponta que de acordo com a legislação educacional brasileira, a educação é proposta como um processo

global que visa à formação integral do educando, devendo incluir, portanto, a Educação Sexual como parte de um processo intencional, mesmo que os valores sociais, éticos e políticos relacionados com a sexualidade estejam presentes nas relações interpessoais de forma não intencional.

Para Maistro; Oliveira (2007) embora haja um número significativo de trabalhos na perspectiva de subsidiar os educadores quanto à abordagem da educação sexual, ainda, segundo as autoras, observa-se que são poucas as escolas que incluem em suas práticas um projeto desta natureza. Quando incluem, baseiam- se em palestras de psicólogos, enfermeiros e/ou médicos e a fixar nos corredores, cartazes informativos sobre campanhas de prevenção de DST/AIDS, gravidez na adolescência e métodos contraceptivos. Para as autoras, essas ações não suficientes para esclarecer as dúvidas e compreender as múltiplas expressões do tema.

> Falar sobre sexualidade por si só já é um desafio, as resistências são muitas, exigindo de todos os envolvidos revisarem conceitos, superar preconceitos e estereótipos, olhar reflexivamente sobre a própria sexualidade, lidar com tabus, medos vergonha (MAISTRO; OLIVEIRA, 2007, p.2).

Para Maistro; Oliveira (2007) os projetos escolares para discutir o tema da sexualidade podem ser desenvolvidos a partir de qualquer iniciativa: de uma professora, de um grupo, ou de uma política pública; entretanto, o autor ressalta que qualquer que seja a origem dessa iniciativa parece imprescindível que o projeto se sustente e se desenvolva de modo independente para se ajustar às características dos problemas enfrentados pela escola no que tange à sexualidade.

> Quanto mais a escola desenvolver projetos relacionados com os problemas contextuais da sexualidade, mais garante a sua continuidade e sustentabilidade, legitimando o projeto na prática. Mas, é essencial que, professores, alunos e pais mantenham um diálogo permanente, que haja a conscientização de que sexualidade é um fato que deve ser tratado e construído ao longo da vida e que é necessário a formação específica aliada ao conhecimento científico dos educadores para nortear as propostas contidas no projeto de Educação sexual (Maistro; Oliveira, 2007).

Vários currículos escolares mal abordam o tema e quando abordam é de forma pouco profunda, tratando - se muita das vezes sobre a parte biológica, desconsiderando toda parte social e cultural. Do mesmo modo, sobre as políticas públicas que se debruçam sobre a elaboração dos materiais didáticos utilizados no ensino público fundamental e médio, no que tange a temáticas em sexualidade mais relacionadas às questões subjetivas e socioculturais, considera-se que a efetiva inclusão nos currículos ainda permanece no plano ideológico e revela-se distanciada das práticas (RIOS; SANTOS, 2008).

De acordo com Maia; Ribeiro (2011) uma educação sexual adequada deveria fornecer informações e organizar um espaço onde se realizariam reflexões e questionamentos sobre a sexualidade. Deveria esclarecer sobre os mecanismos sutis de repressão sexual a que estamos submetidos e sobre a condição histórico-social em que a sexualidade se desenvolve e ajudar as pessoas a ter uma visão positiva da sexualidade, a desenvolver uma comunicação mais clara nas relações interpessoais, a elaborar seus próprios valores a partir de um pensamento crítico, a compreender melhor seus comportamentos e o dos outros e a tomar decisões responsáveis a respeito de sua vida sexual.

Complementando, Furlanetto (2019) acrescenta a necessidade de avanços na área da educação sexual nas escolas

brasileiras, uma vez que suas ações ainda estão pautadas em um tratamento moral e pedagógico. Para a autora, é importante reconhecer que algumas práticas vêm sendo desenvolvidas e que há um esforço por parte de profissionais, especialmente os da área da saúde, para abordar a temática no contexto escolar, mas ainda são muitas as barreiras que impedem a consolidação das práticas previstas nos PCN, as quais precisam ser reconhecidas e superadas.

4 O Papel do Docente no Processo de Educação Sexual

O papel do docente é primordial no processo do ensino sobre educação sexual. Acreditando em uma formação de qualidade, o professor é quem influencia a vida do aluno diretamente, já que passamos dias da semana com cada um deles, é um contato direto. Por isso, é de extrema importância debater e refletir assuntos tão importantes, que talvez não seriam abordados dentro de casa.

Dessa forma, Ribeiro; Reis (2007) ressaltam que a escola, querendo ou não, depara-se com situações nas quais é chamada a intervir. Para os autores, seja numa brincadeira entre os colegas ou nos desenhos que ficam pelas portas e paredes dos banheiros, a sexualidade se apresenta no cotidiano da escola e dependendo da visão destes diante o tema, o trabalho poderá vir numa abordagem mais conservadora ou progressista.

Para Figueiró (2010), ainda há restrições nos conteúdos abordados nas práticas e segundo a autora estas restrições estão relacionadas ao fato da sexualidade permanecer como um tabu para muitos profissionais, bem como a valores morais e religiosos e também à falta de preparo na formação acadêmica para o trabalho de educação sexual.

Para Quirino; Rocha (2012) na percepção docente a educação sexual, vinculada aos aspectos informativos e associada ao bom senso, é a chave principal para estimular nos/

as adolescentes comportamentos sexuais classificados como saudáveis e responsáveis. Os autores sinalizam, ainda, a mudança de paradigma quanto ao tratamento que a sociedade atribui à sexualidade, o qual, nos dias atuais, perde seu status de tabu, uma vez que as vivências e práticas sexuais têm conquistado maior liberdade de expressão. Essa liberdade pode estar relacionada à maior abertura de diálogo sobre sexo, exposição midiática de temas relacionados à sexualidade, desvinculação do prazer e maternidade, aumento das expressões sexuais e erotização precoce (QUIRINO; ROCHA, 2012).

Os autores ainda apontam que os temas, para o desempenho de uma educação sexual na atualidade, ainda ficam concentrados em torno de mitos e tabus sexuais de base fisiopatológica e/ou epidemiológica. Além disso os autores ressaltam que o trabalho e a prática docente configuraram-se como verticalizados e descontextualizados dos aspectos históricos e socioculturais, estando centrados no ensino com pouca diversificação de recursos e estratégias didáticas e pedagógicas, o que gera pouco impacto na clientela estudantil.

5 O Professor de Matemática e Educação Sexual

Muito se questiona sobre quem aplica o estudo sobre educação sexual, logo vem em mente o professor de ciências, mas porquê não de outras áreas? A educação é interdisciplinar e dentro da matemática, é possível trabalhar vários assuntos.

Barreto (2007) aponta que em contraposição ao ensino tradicional, surgiram nas últimas décadas, diversas propostas pedagógicas que buscam evidenciar o papel ativo do aprendiz e compreender os processos que estes utilizam nas transformações necessárias para o aprendizado. Para a autora é necessário repensar a relação do aluno com a disciplina assim como o papel do professor, é necessário buscar uma aprendizagem que se apoie

sobre a atividade intelectual do aluno, não sobre a memorização, nem sobre a aplicação de saberes cujos sentidos não são verdadeiramente compreensíveis.

Nessa perspectiva, Barreto (2007) afirma que os documentos do MEC apontam como sugestão a articulação entre as disciplinas escolares e os temas transversais e, entre eles, a Educação Sexual.

Neste sentido, D´Ambrosio; Rosa (2016) apontam que há uma metodologia muito utilizada e bastante eficiente, conhecida como Etnomatemática que apresenta outros entendimentos sobre a educação matemática e que emergiu em meados dos anos de 1970, no Brasil, por Ubiratan D´Ambrósio. Cada grupo cultural desenvolve e constrói a sua matemática em seu processo de leitura do mundo.

Etnomatemática trata-se de uma postura didática que busca uma melhoria no processo de ensino-aprendizagem da disciplina com a incorporação no currículo matemático do conhecimento advindo da vida do aluno e de valores humanos, como, por exemplo, a cooperação, a solidariedade e a ética. São conhecimentos que promovem a valorização e o respeito às maneiras diferentes que a humanidade utiliza diariamente para explicar, entender, compreender e lidar com as situações-problema enfrentadas no cotidiano (D'AMBRÓSIO; ROSA, 2016)

Para Rosa Neto (2002) apud Schwantes (2019) existe uma significativa relação entre a matemática e a cultura, ambas como resultado de uma a adaptação social em função das necessidades de sobrevivência através dos tempos, representando um legado empírico, sistemático e científico.

> Os povos têm uma cultura [etno], lidam e explicam sua própria cultura [matema], no entanto, cada qual do seu jeito e de sua forma [tica]. Desta constatação resultou a denominação etnomatemática, que por sua vez, leva em conta as explicações próprias das comunidades,

> gotejando-as com as formas universais de conhecimento. É fato que toda criança antes de chegar na escola sabe lidar perfeitamente com a sua realidade, a qual se encontra em permanente evolução. A etnomatemática mexe com a curiosidade da criançada, volta-se em primeiro lugar, para o ambiente onde ela vive, cumprindo sobremaneira uma tarefa que a escola vem esquecendo (D'AMBRÓSIO, 1993 apud SCHWANTES, 2019, p.5).

Neste sentido trazer um conteúdo centrado nas expectativas e perspectivas do aluno o faz se sentir mais seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, e de outros conteúdos na busca de soluções para os problemas que ele encontra dentro do seu cotidiano que podem ser sobre aspectos da sexualidade humana.

Complementando Flach; Kopzinski (2016) ressaltam que as situações problemas discutidas em sala de aula não devem ser trabalhadas no objetivo de atingir apenas determinados conteúdos matemáticos, mas também discutir e compreender questões políticas, sociais e culturais. Para as autoras, as discussões acerca dos estudos de gêneros, as questões discriminatórias, o estudo das diferentes formas de entender e vivenciar a sexualidade, o respeito com o outro, a seriedade e entendimento da importância do estudo da temática sexualidade feita pelos alunos, entre outras questões abordadas, tudo isso fez parte do currículo de matemática.

> Penso ser esta uma matemática repleta de sentidos, uma matemática utilizada como ferramenta para a compreensão e comunicação no mundo em que vivemos, uma matemática que não existe por si só, mas que está inserida em um contexto, que faz parte da vivência, do dia-a-dia do aluno, uma matemática com significado (Flach; Kopzinski, 2016, p.13).

Para tanto, Barreto (2007) aponta que a escola desempenha um papel importante na educação para a sexualidade

e que o trabalho de orientação sexual pode contribuir para a prevenção dos diversos problemas, inclusive ligados a gravidez precoce. No entanto, para a autora, apesar destas diretrizes, há ainda uma precariedade com que a escola vem assumindo a sua responsabilidade nestas questões e as dificuldades de implementação de ações inovadoras no contexto escolar. Além disso, Barreto (2007) aponta que os estudantes têm interesse em tratar dos assuntos ligados à sexualidade no ambiente escolar, mas que as informações que possuem são insuficientes e de qualidade duvidosa.

Para Guse; Waise; Esquincalha (2020) os futuros(as) professores(as) de matemática poderão contribuir para que a escola proporcione uma educação equitativa para todos(as). Os autores apontam a necessidade de discutir e ser anti todo e qualquer discurso vigente que discrimine, segregue ou exclua qualquer pessoa por sua diversidade de gênero ou sexual, e segundo os mesmos deve ser também discutido nos contextos da família e da escola e nas salas de aula de quaisquer disciplinas, incluindo as de matemática.

Portanto, de acordo com Guse; Waise; Esquincalha (2020) a formação do professor de matemática deve abranger discussões sobre as questões de gênero e sexualidade para que estes possam aprender a reconhecer e trabalhar com seus alunos que não fazem parte do padrão hegemônico da sociedade, lidando com situações preconceituosas e discriminatórias nos ambientes escolares e não sendo reprodutores dessas ações.

6 Considerações Finais

Conforme observado no decorrer do trabalho, entendendo o que é educação sexual, o estudo sobre sexualidade, nota - se a importância do assunto ser bem trabalho nas escolas, com o intuito de esclarecimento e reflexão. Não só recorrendo a parte biológica,

que não deixa de ter sua importância, mas trazendo toda parte social e psicológica que são grandes bagagens para o processo.

Recorrendo ao papel da escola e dos professores, especialmente o professor de matemática, este artigo confirma a importância da preparação desse profissional, assim como docentes de outras áreas, para atuar na orientação da educação sexual e assim evitar problemas como gravidez na adolescência, infecções sexualmente transmissíveis, reconhecer algum tipo de abuso ou assédio, ter esclarecimento sobre o corpo e seus limites.

É muito superestimado o trabalho dos professores na área de exatas, como no caso o professor de matemática, mas entende - se a grande importância de sua participação, usando a metodologia etnomatemática, que visa trazer todo o contexto social e cultural do aluno para a aplicação do conteúdo. Pode - se trabalhar com enunciados bem elaborados no campo de estatística, por exemplo.

Ser professor, é ir além do que explicar a matéria a classe, ele é influenciador direto, muita das vezes convivendo mais com o aluno do que a própria família, é dever social e responsabilidade encarar isso de forma com que as circunstâncias sejam positivas para o aluno. O professor sendo assim porta voz de muitos assuntos.

Nota - se a relevância de unir - se o útil ao agradável, de acesso a informação, com a capacitação do docente e aplicação do assunto. Vários alunos não estarão salvos da ignorância, por assim dizer, podendo refletir sobre o tema.

Referências:

ALMEIDA, D, S, O. COSTA, R, L. SILVA, T, M. Educação Sexual. **Chega de tabu! a sexualidade sem medos e sem cortes**. 2005. Disponível em: file:///C:/Users/le_quintiliano/Downloads/chegadetabu.pdf. Acesso em: 9 jun. 2021.

ABRAMOVAY, M.; CASTRO, M. G; SILVA, L. B. **Juventude e sexualidade**. Brasília: UNESCO Brasil, 2004. Disponível em: http://www.cepac.org.br/agentesdacidadania/wp- content/uploads/2014/04/Unesco_juventudes_sexualidade.pdf. Acesso

em: 20 set 2021.

BIANCON, M. L. A Educação Sexual na Escola e as Tendências da Prática Pedagógica dos Professores. Anais do SIES - **Simpósio Internacional de Educação Sexual da UEM**. 2009. disponível em: file:///C:/Users/Dell/Downloads/8.pdf. Acesso em: 20 set 2021.

D'AMBROSIO, U.; ROSA, M. Um diálogo com Ubiratan D'Ambrosio: uma conversa brasileira sobre etnomatemática. In BANDEIRA, F. A.; GONÇALVES, P. G. F. (Orgs.) **Etnomatemáticas pelo Brasil: aspectos teóricos, matemáticas e práticas escolares**. Curitiba, PR: Editora CRV. 2016. pp. 13-37.

FLACH, V, F. KOPZINSK, S, D. Educação Sexual. **Saberes matemáticos produzidos em um projeto interdisciplinar sobre educação sexual**: Análise de um experiência pedagógica no 7° ano do ensino fundamental. Disponível em: https://www.feevale.br/Comum/midias/31f0f702-a76a-4dbd-a1f2-a7b114c7f0f8/Saberes%20matem%C3%A1ticos%20produzidos%20em%20um%20p rojeto%20interdisciplinar%20sobre%20educa%C3%A7%C3%A3o%20sexual%20.pdf. Acesso em 01 Dez. 2021.

FERNANDES, M. A.; CORREIRA, M. S. LAGES, L. M. P. Inclusão Sexual: abordagem docente sobre a educação sexual no ensino fundamental II. **2º Congresso Internacional de Educação Inclusiva**. Universidade Federal da Paraíba, 2016. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/cintedi/2016/TRABALHO EV060_M D1_SA9_ID300_14102016114128.pdf. Acesso em 01 Dez. 2021.

FIGUEIRÓ, M. N. D. Educação sexual: retomando uma proposta, um desafio. 3. ed. Londrina: Eduel, 2010.

FOUCAULT, M. **Michel Foucault, uma entrevista: sexo, poder e a política da identidade**. verve, 5: 260-277, 2004.

FURLANETTO, Milene Fontana et al . Educação sexual em escolas brasileiras: revisão sistemática da literatura. Cad. Pesqui., São Paulo , v. 48, n. 168, p. 550-571, jun. 2018 . Disponível em < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-15742018000200550&lng=pt&nrm=iso >. Acesso em 04 junho de 2019.

GUSE, H. B.; WAISE, T. S.; ESQUINCALHA, A. C. O que pensam licenciandos(as) em matemática sobre sua formação para lidar com a diversidade sexual e de gênero em sala de aula? Revista Baiana de Educação Matemática, v. 01, p. 01-25, e202012, jan./dez., 2020.

LEAL, M. M.; SAITO, M. I. Educação sexual na escola. Artigos Originais. São Paulo, 2014. Disponível em: https://aws.amazon.com/pt/s3/. Acesso em: 23 mai. 2021.

MAISTRO, V, I, A. OLIVEIRA, V, L, B. Educação Sexual. abordagem da educação sexual nas escolas - um projeto urgente. Anais do SIES - **Simpósio Internacional de Educação Sexual da UEM**. Disponível em: https://docplayer.com.br/70710207- Abordagem-da-educacao-sexual-nas-escolas-um-projeto-urgente.html. Acesso em 03 Dez. 2021.

MAIA, A. C. B; RIBEIRO, P. R. M. Educação Sexual: princípios para ação. Doxa, v.15, n.1, p.75-84, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/124985. Acesso em: 20 set 2021.

PONTES, A. F. Sexualidade: **Vamos Conversar Sobre Isso? Promoção do Desenvolvimento Psicossexual na Adolescência: Implementação e Avaliação de um Programa de Intervenção em Meio Escolar**. Tese (Doutorado em Ciências de Saúde Mental) – Instituto de Ciências Biomédicas de Abel Salazar da Universidade do Porto., Porto 2011. Disponível em: https://repositorio- aberto.up.pt/bitstream/10216/24432/2/Sexualidade%20vamos%20conversar%20sobr e%20isso.pdf. Acesso em 20 set 2021.

QUIRINO, G, S.; ROCHA, J, B, T. Educação Sexual. Sexualidade e educação sexual na percepção docente. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. 43, p. 205-224, jan./mar. 2012.

RIBEIRO, M. REIS, W. Educação Sexual: o trabalho com crianças e adolescentes. **Revista Brasileira de Sexualidade Humana**. 2007. Disponível em: https://www.rbsh.org.br/revista_sbrash/article/view/389/362. Acesso em: 20 set 2021.

SALES, C. M. V. Os jovens como experimentadores e produtores de devires. In: M. N. Damasceno, M.N; K. S. L. Matos; K.S.L; G. Vasconcelos, J.G (Orgs.). **Trajetórias da Juventude**. Fortaleza, 2001. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/42933. Acesso em: 23 mai. 2021

SILVA, K. F. Pedagogia da sexualidade: o papel do professor. **Artigos Originais**. João Pessoa, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/4317/1/KFS22112016.pdf. Acesso em 09 mai. 2021.

VIEIRA, P. M; MATSUKURA, T, S. Educação Sexual; Revista Brasileira de Educação v. 22 n. 69 abr/jun. 2017.

SCHWANTES, V. et al. Reflexão sobre etnomatemática como

possibilidade pedagógica. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, v. 11, ano 4, pp. 148-165, jul 2019.

GRAFOS: algoritmos para calcular os menores caminhos

Gabriela Fernanda Moreira
Licencianda em Matemática - Uni-FACEF
moreirafernandagabriela@gmail.com

Mauricio Conrado Alves
Licenciando em Matemática - Uni-FACEF
mconrado193@gmail.com

Dra. Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho
Doutora em Ciências - Uni-FACEF
lucindarcoelho@gmail.com

1 Introdução

Uma grande complexidade de estruturas do mundo real pode ser representada subjetivamente por meio de grafos. Os grafos são representações abstratas poderosas e flexíveis, possuem características específicas em diferentes áreas.

Segundo Feofiloff (2013), grafos são um bom modelo para muitos problemas de matemática, de computação e de engenharia. Afirma ainda, que a teoria dos grafos não é propriamente uma teoria, mas uma coleção de problemas os quais apresentam interessantes desafios intelectuais e têm importantes aplicações práticas.

Grafos surgiram em 1736, com um problema da época, conhecido como o Problema das sete pontes de Königsberg, criado pelos próprios habitantes da cidade. Grafos estão interligados com a matemática e com várias áreas, taiscomo: sociologia, biologia, computação, jogos, cinematográfica etc., apesar degrafo estar presente em diferentes áreas, ele possui importâncias específicas dentro de cada uma.

Grafos são estruturas discretas que podem ser utilizadas na representação e resolução de várias classes de problemas algorítmicos. Por exemplo, existem os “problemas de decisão” cujo

objetivo consiste em decidir a resposta **sim** ou **não** a uma questão; os de "localização" em que o objetivo é localizar certa estrutura e que satisfaça um conjunto de propriedades dadas e os de "otimização" que envolve critérios de maximização e minimização. Os algoritmos associados a esses problemas permitem verificar a existência de caminhos para ir de um objeto a outro seguindo determinadas conexões.

Um grafo pode ser uma espécie de mapa rodoviário, os vértices são as cidades e as arestas são estradas de mão dupla que ligam as cidades; ou uma rede de distribuição de energia elétrica interligando em casas. Na web, os vértices são representados pelas páginas, e as arestas pelos hiperlinks de uma página para a outra. Nas redes sociais obtêm-se grafos por meio de ciclos de amizades distintas, por exemplo, o A é amigo de B, D, e G, mas o B, não é amigo de D e G, através do A o B começa a ter uma relação mesmo que indireta com D e G, pois ambos possuem uma amizade em comum com A. Outros exemplos poderiam ser expostos, mas o essencial é ter a percepção que os grafos estão presentes em inúmeros contextos.

O objetivo esse trabalho é abordar os algoritmos de Dijkstra e Floyd-Warshall para resolução de problemas que procuram os menores caminhos cujas soluções podem ser modeladas com grafos. Tais algoritmos nos dão um caminho menor por meio de matrizes de adjacência e de incidência e devido a isso, serão abordadas também

O Algoritmo de Dijkstra (E.W. Dijkstra) é um dos algoritmos que calcula o caminho de custo mínimo entre vértices de um grafo. A partir do vértice escolhido como origem da busca, este algoritmo calcula o custo mínimo deste vértice para todos os demais vértices do grafo. É simples e com um bom nível de desempenho, mas não garante, a exatidão da solução caso haja a presença de arcos com valores negativos. Este algoritmo parte de uma estimativa inicial para o custo mínimo e ajusta sucessivamente este cálculo. Ele

avalia que um vértice estará fechado quando obtiver um caminho de custo mínimo do vértice tomado como origem da busca até ele, caso contrário será dito estar aberto.

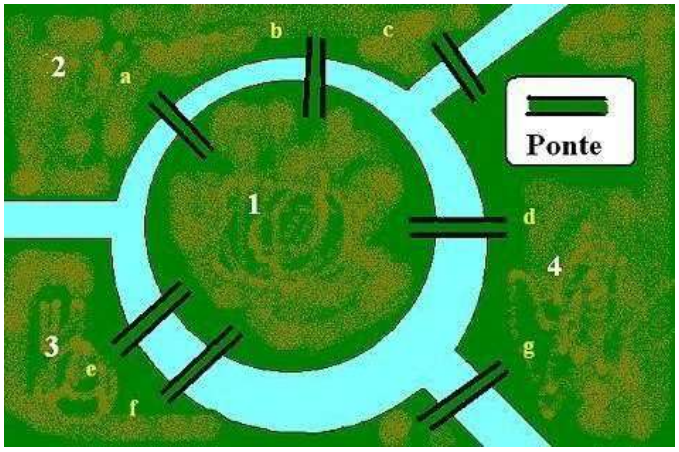
O algoritmo de Floyd-Wharshall calcula os caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices de um grafo direcionado e ponderado que eventualmente possua arcos com peso negativo, mas que não possua ciclos de custo negativo escolhido um vértice como raiz da busca, este **algoritmo** calcula o custo mínimo deste vértice para todos os demais vértices do grafo. O **algoritmo** pode ser usado sobre grafos orientados (dígrafos), ou não.

2 Grafos

2.1 Desenvolvimento Histórico

Grafos (BOAVENTURA NETTO/JURKIEWICZ, 2009, pag.1,2.) surgem em 1736, por intermédio do problema das Sete pontes de Königsberg, cidade que foi erguida entre o rio Pregel, onde existem duas ilhas e para ajudar a passagem das pessoas e do transporte de cargas, foram construídas sete pontes em diferentes locais como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Representação de Königsberg



Fonte: Wikipedia, 2021, online.

Os habitantes queriam saber se era possível fazer um percurso partindo de uma origem e retornando a ela mesma, passando por todas as pontes uma única vez. O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), foi o primeiro que conseguiu desenvolver uma solução para o tal problema e provar que não era possível realizar o percurso dentro das prescrições que os habitantes sugeriram, além de criar um diagrama para representar a cidade e generalizar o problema (GONSALVES, 2007, p 14).

2.2 Definições de Grafo

Grafos é uma representação subjetiva formada por dois conjuntos: vértices, conhecidos também como nódulo ou nós e arestas também chamadas de arcos.

Uma grande complexidade de estruturas do mundo real pode ser representada subjetivamente por detrás deles. Qualquer aresta é um par não ordenado de vértices, isto é, um conjunto com exatamente dois vértices. Imaginem que um grafo seja uma espécie de mapa rodoviário, os vértices são as cidades e as arestas são estradas de mão dupla que ligam as cidades.

Um grafo é por um par *(V, A)*, onde *V* é o conjunto de vértices e *A* o conjunto das arestas que interligam os pares de vértices.

Quando apenas é admitida no máximo uma aresta entre dois nós, diz-se que o grafo é **simples**. Os **vértices** ligados por uma aresta chamam-se **adjacentes**, como mostra a Figura 2. A **aresta** que emenda dois vértices denomina se **incidente** a cada um dos vértices, como na Figura 3.

Figura 2 - Os vértices X e Y são adjacentes



Fonte: Elaborado pelos autores.

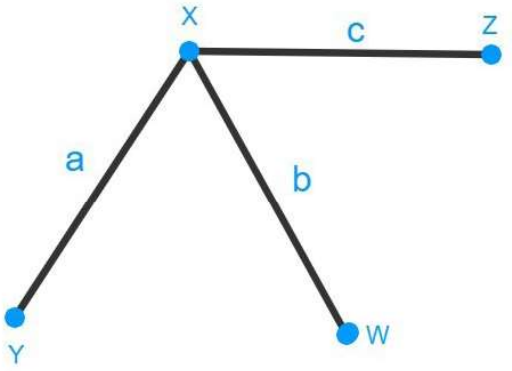
Figura 3 - A aresta 'a' é incidente em X e Y



Fonte: Elaborado pelos autores.

O **número de arestas** incidentes no vértice expressa o **grau** desse vértice. O grau máximo do grafo é o maior dos vértices (X(G)), por consequência o grau mínimo (Y(G)) é o menor. Na Figura 4 o vértice X tem três arestas incidentes, logo o grau é 3. Os vértices Z, W e Y tem uma aresta incidente, sendo assim, ambos são grau 1. Dessa forma, o grau máximo do grafo é 3 e o mínimo é 1.

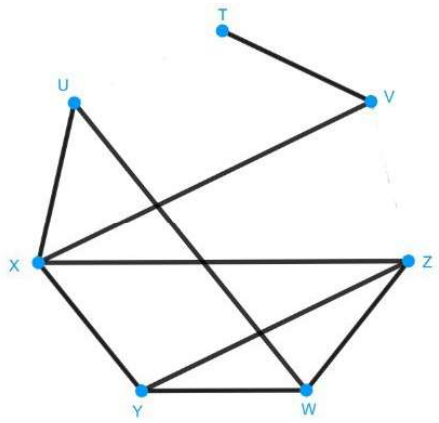
Figura 4 - Grau máximo do grafo é 3 e o mínimo é 1



Fonte: Elaborado pelos autores.

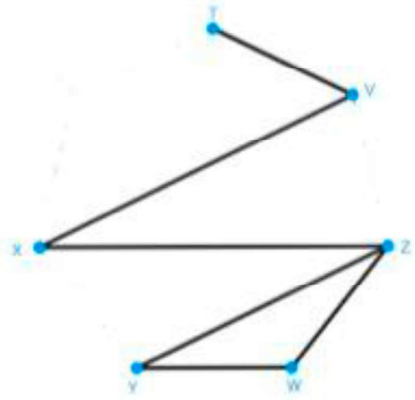
Um segmento de vértices em que os vértices sucessivos estão ligados pelas arestas do grafo refere-se a um caminho.

Figura 5



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 6



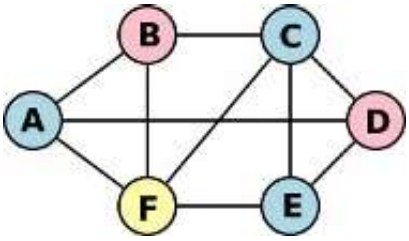
Fonte: Elaborado pelos autores.

Os vértices T-U-V-W-X-Y-Z ilustrados na Figura 5 formam um caminho encontrado no grafo G da Figura 6.

Outras concepções de grafos são de que o conjunto dos vértices pode ser infinito, e nesse caso é chamado de grafo infinito. No momento em que existir mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices, tem-se as arestas múltiplas e quando há uma aresta que conecta no mesmo nó, chamase **laço**.

Os nós podem ser representados de inúmeras formas. A Figura 7 ilustra um grafo colorido não dirigido.

Figura 7 - Grafo colorido não dirigido



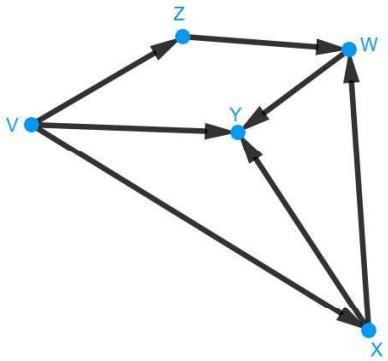
Fonte: Wikipedia, 2021, online.

2.2.1 Dígrafos ou grafos dirigidos

Além do grafo, existe o conceito de dígrafo. A distinção entre os conceitos consiste no fato de que as arestas do grafo são simplesmente formadas por dois vértices, enquanto que no dígrafo, as **arestas** possuem um **vértice inicial** e um **vértice final** (arestas dirigidas).

Quando as arestas de um grafo tiverem **orientação**, chamamos de **grafo dirigido** ou **dígrafo** e quando não tiver direção chamamos de grafo não dirigido ou simplesmente grafos. Grafos orientados, ou dígrafos são utilizados quando suas arestas são direcionadas, como é o caso do grafo das Figura 8. Pode-se perceber que as arestas que ligam os vértices têm indicações de onde saem e para onde vão, simbolizando que não é possível fazer o caminho contrário.

Figura 8 - Grafo dirigido ou dígrafo

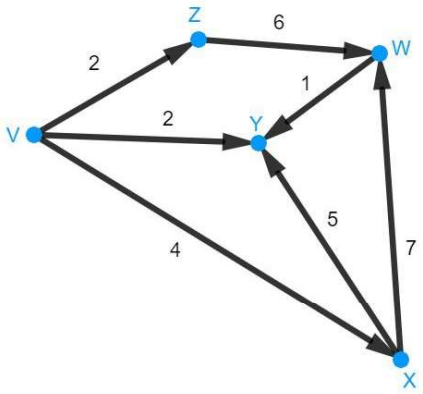


Fonte: Elaborado pelos autores.

Em grafos orientados, o grau de entrada de um vértice é o número de arestas que **entram** no respectivo vértice V e é definido por **d-(v)**, e o de saída é o número de arestas que saem do vértice em direção a outros, definido por **d+(v)**. O vértice é chamado de **fonte** quando o grau de entrada é igual a zero e **sumidouro** quando o grau de saída for a igual a zero.

Os **grafos ponderados**, são aqueles que além da orientação recebem valores ou pesos para suas arestas, como ilustrado na figura 9.

Figura 9 - Grafo ponderado



Fonte: Elaborado pelos autores.

2.3 Representação de grafos por matrizes ou tabelas

Nesse modelo de representação criam-se vetores para cada vértice, em que os elementos desses vetores demonstram as ligações entre o vértice representado pelo vetor e cada vértice que possui o grafo.

Para representação de grafos, as formas mais comuns são: matriz de adjacências e de incidência.

Dado um grafo (G) = (V, A) pode se obter desse grafo uma matriz, utilizando-se um grafo não orientado, obtém-se uma matriz de adjacência.

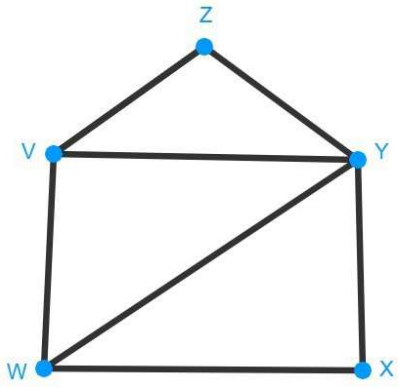
2.3.1 Matriz de adjacência de **grafos não orientados**

Uma matriz M de ordem N x N, para um grafo não orientado é tal que:

- N = ao número de vértices;
- M (i, j) = 1 se existir arestas de i a j;
- M (i, j) = 0 se não existir arestas de i a j.

Exemplos:

Figura 10 - Grafo não orientado



Fonte: Elaborado pelos autores.

Tabela 1 – Para a obtenção da Matriz de adjacência do grafo não orientado da figura 10.

	V	W	X	Y	Z
V	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
W	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
X	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
Y	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
Z	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ou na forma matricial ➔ $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

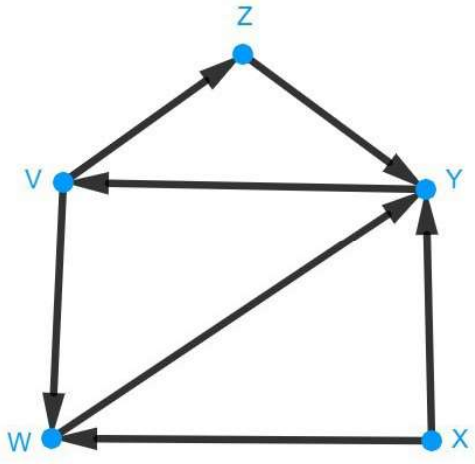
2.3.2 Matriz de adjacência e de incidência de **dígrafos (grafos orientados)**

Utilizando-se um grafo orientado, pode-se obter uma matriz de adjacência e uma matriz de incidência.

2.3.2.1 Matriz de adjacência M de ordem N x N, para um dígrafo (grafo orientado)

- N = ao número de vértices;
- M (i, j) = 1 se existir arestas de i a j;
- M (i, j) = 0 se não existir arestas de i a j.

Figura 11 - Dígrafo (grafo orientado)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Tabela 2 – Para a obtenção da Matriz de adjacência do **dígrafo (grafos orientado)** da Figura 11.

	V	W	X	Y	Z
V	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
W	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
X	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
Y	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
Z	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ou na forma matricial ➔ $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.3.2.2 Matriz de incidência de **dígrafos (grafos orientados)**

Com uma pequena modificação é possível utilizar a estrutura anterior, para identificar quando uma aresta que incide sobre um vértice converge ou diverge para este vértice.

A matriz de incidência do grafo orientado ou dígrafo, M de ordem N x N, em que N é o número de vértices, é definida como:

- M (i, j) = +1 se existir arestas de j até i, isto é, se a aresta converge de j para i;
- M (i, j) = -1 se existir arestas de i até j, isto é, se a aresta diverge de j para i;
- M (i, j) = 0 se não existir arestas de i a j.

Tabela 3 – Para a obtenção da Matriz de incidência do **dígrafo (grafo orientado)** da Figura 11.

	V	W	X	Y	Z
V	0	+1	0	-1	+1
W	-1	0	-1	+1	0
X	0	+1	0	+1	0
Y	+1	-1	-1	0	-1
Z	-1	0	0	+1	0

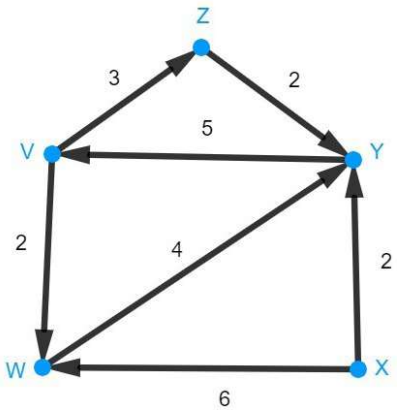
Fonte: Elaborado pelos autores.

Ou na forma matricial ➔ M = $\begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ +1 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}$

2.3.3 Matriz de dígrafos (grafos orientados) valorados

Grafo valorado é todo grafo que suas arestas apresentam valores. Isto é, em alguns casos os caminhos que ligam os vértices têm valores diferentes uns dos outros, então se deve atribuir valores às arestas do grafo. Nesse caso dizemos que o grafo é um grafo valorado, veja a Figura 12.

Figura 12 - Grafo Valorado



Fonte: Elaborado pelos autores.

Tabela 4 – Para a obtenção da Matriz de incidência do **grafo valorado** referente à figura 12.

	V	W	X	Y	Z
V	0	2	0	0	3
W	0	0	0	4	0
X	0	6	0	2	0
Y	5	0	0	0	2
Z	0	0	0	2	0

Fonte: Autoria própria.

Ou na forma matricial ➔ $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

As definições apresentadas são os conceitos básicos de grafos necessários para elucidar os problemas nos quais serão modelados nesse trabalho aplicando estes mecanismos.

3 Problema do Caminho Mínimo

O problema do caminho mínimo consiste em encontrar o menor caminho entre dois nós ou vértices, de forma em que a soma dos valores de suas arestas existentes possa ser minimizada. Assim, resolver este problema pode significar determinar o caminho entre dois vértices com o custo mínimo, ou com o menor tempo de viagem ou a menor distância. Por exemplo, um caminhoneiro deseja passar por um caminho mais curto entre dois vértices quaisquer, onde o vértice de origem seja A e o destino seja G, precisa-se analisar o caminho mais curto para passar por todo o percurso de modo que chegue mais rápido no destino, em uma rede qualquer

dependendo de seus atributos, pode existir n caminhos entre um par de vértices determinados como origem e destino. Entre os vários caminhos aquele que possui o menor “valor” é chamado de caminho mínimo. Este valor representa a soma total dos valores das arestas que compõem o caminho, e estes valores podem ser representados pelo tempo de viagem, a distância percorrida ou um custo qualquer da aresta.

Modelagem matemática

Numa rede qualquer, dependendo das suas características, pode existir vários caminhos entre um par de nós, definidos como origem e destino. Entre os vários caminhos aquele que possui o menor “peso” é chamado de caminho mínimo. Este peso representa a soma total dos valores dos arcos que compõem o caminho e estes valores podem ser: o tempo de viagem, a distância percorrida ou um custo qualquer do arco.

O modelo matemático para o problema de caminho mais curto do vértice 1 ao vértice n de um grafo G= (V, A), N = {1, 2, ..., n}.

- Variáveis:

$x_{ij} \in \{0,1\} \rightarrow$ ativação, ou não do arco (i, j)

- Parâmetros:

$c_{ij} \rightarrow$ custo unitário do fluxo em (i, j)
$S(j) \rightarrow$ é o conjunto dos vértices sucessores de j
$P(j) \rightarrow$ é o conjunto dos vértices predecessores de j

- Função objetivo:

$$minZ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in S(i)} c_{ij}\, x_{ij}$$

- Restrições:

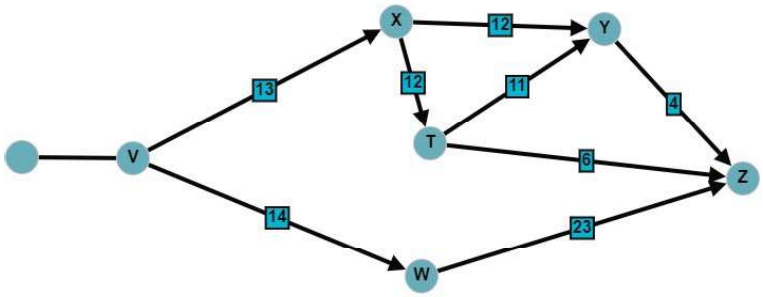
$$\rightarrow \begin{cases} \sum_{j \in S(1)} x_{ij} = 1 \\ \sum_{i \in P(n)} x_{in} = 1 \\ \sum_{i \in P(j)} x_{ij} = \sum_{k \in S(j)} x_{jk} \; ; j = 2; \ldots; n-1 \end{cases}$$

Para resolução do problema de caminho mínimo existem vários algoritmos, dentre eles vamos destacar os algoritmos de Dijkstra e de FloydWarshal. O algoritmo de Dijkstra é uma solução para o problema do caminho mínimo de origem única, funciona em **grafos orientados** e **não orientados**, no entanto, **todas as arestas** devem conter apenas **custos positivos**. O algoritmo de Floyd funciona em **grafos ponderados** seja ele **orientado** ou **não orientado**, e trabalha com **pesos** (ou valores) **positivos** e **negativos**.

3.1 Algoritmo de Dijkstra

O cientista da computação Edsger W. Dijkstra desenvolveu em 1956 o algoritmo original para encontrar o caminho de custo mínimo entre dois nós ou vértices dados em um grafo ponderado positivamente, mas uma variante mais comum é fixar um único nó como o vértice de origem é encontrar o caminho mais curto dele para qualquer outro vértice em um grafo, à principal ideia do algoritmo de Dijkstra é eliminar continuamente os caminhos mais longos entre o vértice de origem e todos os outros vértices do grafo. A maior vantagem desse algoritmo é que as distâncias mais curtas de 2 vértices podem ser calculadas em O (v) em vez de O (3), onde v é o número de vértices do grafo.

Figura 13: Exemplo de um Dígrafo valorado



Fonte: autoria própria

O algoritmo de Dijkstra começa com o vértice selecionado como o vértice de origem e examina todo o grafo para determinar o menor caminho da origem para todos os outros vértices do grafo. Como os vértices são processados sequencialmente, encontrar os caminhos mais curtos do vértice que encontramos para outro vértice é feito como uma operação de relaxamento e a distância entre os vértices será maior ou igual à menor distância calculada. Se começarmos com um vértice, ele terá uma distância de 0 e o vértice restante terá distâncias indefinidas ou infinitas até a fonte. O algoritmo usa os pesos das arestas para encontrar um caminho que minimiza a distância total entre os pesos de um determinado vértice (o vértice de origem) e todos os outros vértices e é só aplicável quando todos os pesos das arestas são positivos, porque durante a execução os pesos são somados para encontrar o caminho mais curto.

Estágios:

1º Marcar todos os vértices como não visitados;
2º marcar o vértice inicial com uma distância atual de 0 e os outros vértices com o símbolo ∞ (infinito);
3º escolher um nó de avaliação do conjunto de nós não visitados, o nó de avaliação deve ser aquele com a

menor distância da fonte;

4º calcular novas distâncias para os vizinhos diretos, mantendo a distância mais baixa em cada avaliação;

5º adicionar vizinhos que ainda não foram estabelecidos ao conjunto de nós não visitados.

Essas etapas podem ser divididas em dois processos, Inicialização e Avaliação, a seguir um exemplo de aplicação dessas etapas ➔.

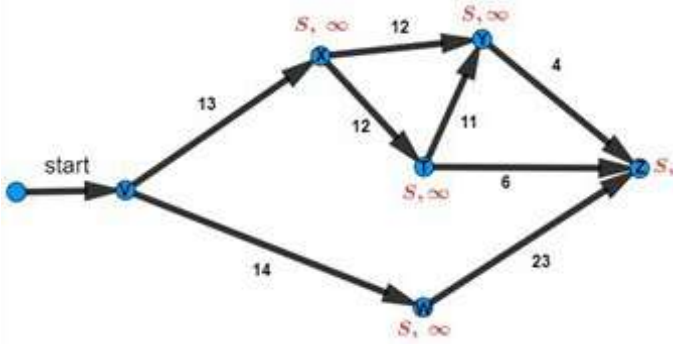
Exemplo da aplicação para cálculo do menor caminho com o algoritmo de Dijkstra

Seja o dígrafo da figura 13

- Inicialização

Marcar todos os nós com uma distância infinita e um predecessor desconhecido, exceto a fonte. Em seguida atribui-se valor ao nó V (entendemos que a distância do nó V ao nó V é zero), deste modo, cada nó no resto do grafo será distinguido com um predecessor e uma distância, como mostra a figura 14.

Figura 14 - Exemplo da aplicação do algoritmo de Dijkstra: 1º passo



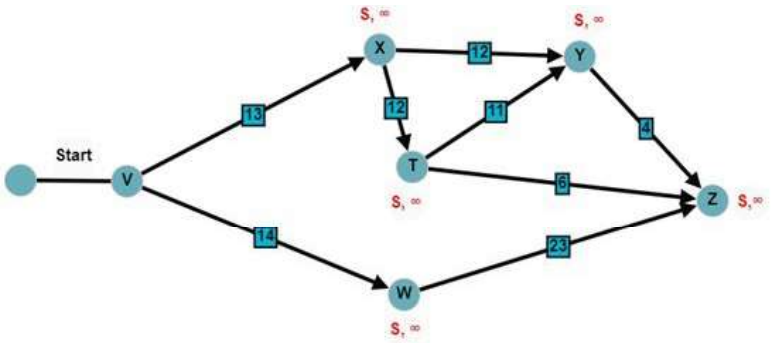
Fonte: Elaborado pelos autores.

Para finalizar o processo da Inicialização, precisamos adicionar o nó V aos nós não definidos dispostos a serem visitados primeiro na etapa da avaliação.

Avaliação

Nesta etapa o nosso grafo já foi inicializado, escolhermos vértices com a menor distância do conjunto não selecionado e, em seguida, avaliaram todos os vértices adjacentes que não foram selecionados. No caso a seguir estamos calculando a menor distância do vértice V ao vértice Z, onde o vértice V é nosso vértice de início pois possui a menor distância, como mostrar a figura 15.

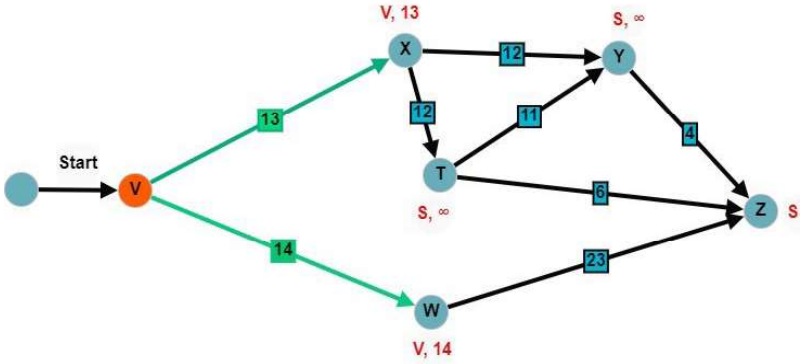
Figura 15 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 2ª iteração



Fonte: Elaborado pelos autores.

O conceito é adicionar o peso da aresta à distância do vértice de avaliação e, em seguida, compará-lo com a distância do destino. por exemplo, para o vértice X, 0 + 13 é menor que infinito, então a nova distância para o vértice X é 13, e o novo predecessor é V, o mesmo se aplica ao nó W, pois 0 + 14 é menor que infinito, então a nova distância de W é 14 e seu predecessor é V, como na figura 16.

Figura 16 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 2ª iteração

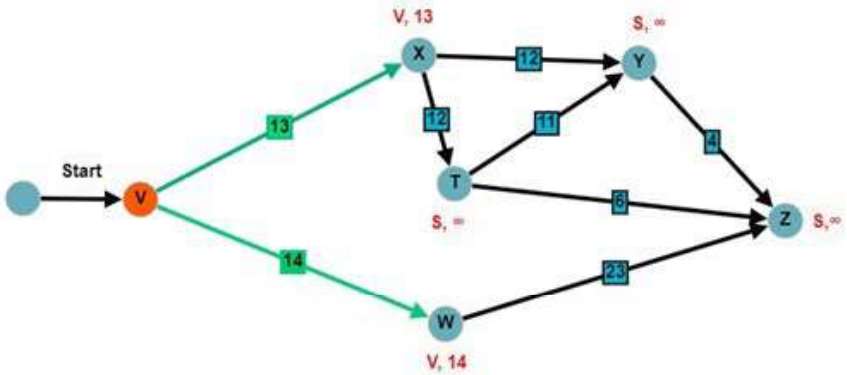


Fonte: Elaborado pelos autores.

Dado aos muitos desafios enfrentados pelo setor de empreendimento, uma estratégia útil seria a implantação de um sistema de gestão financeira eficiente.

Ao ser feito a primeira iteração notamos que a menor distância dos vértices analisando é de V→X, então X passará a ser o nosso predecessor e a partir do mesmo vamos analisar outros vértices do conjunto não visitados, já que a partir do X temos a possibilitada de dois caminhos X→T e X→Y. A segunda iteração é calcular o menor caminho dentro os caminhos dispostos, que são X→Y e X→T, ao calcular é notório que a distância de ambos são a mesma resultando em 25 a distância, como mostra a figura18.

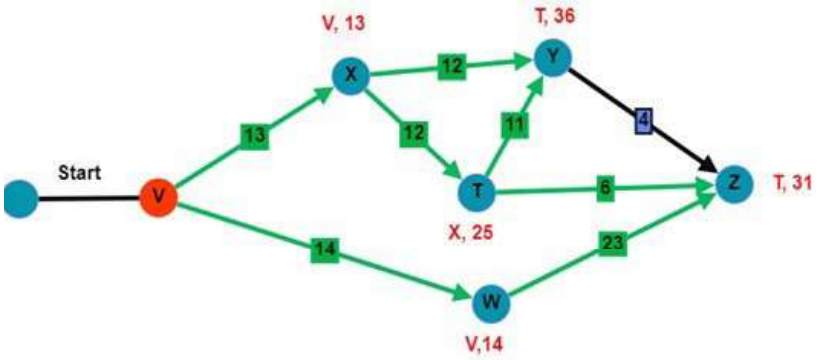
Figura 17 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 2ª iteração



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na terceira iteração será analisado vértice W e o caminho disposto a partir do mesmo, se sua distância for menor do que 25, logo o menor caminho de V→Z foi encontrado, se a distância for maior que 25 é necessário retornar ao vértice com a menor distância encontrada anteriormente e calcular uma nova rota. Ao se calcular a distância do vértice W, 14 + 23 resultando é 37, 37 > 25 sendo assim sua distância é maior do que a distância calculada anteriormente, portanto é necessário retornar a vértice com a menor distância e calcular uma nova rota, como mostra a figura 18.

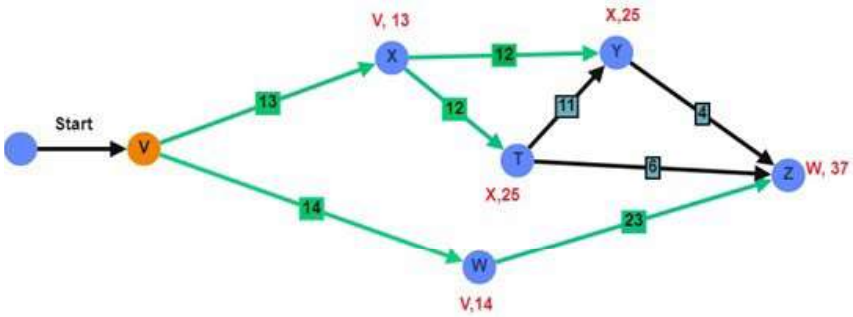
Figura 18 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 3ª iteração;



Fonte: Elaborado pelos autores

Na quarta iteração pode ser analisado novas rotas partindo tanto de Y como de T, pois suas distâncias são equivalentes. Sendo T nosso predecessor temos a possibilidade de dois caminhos, um que vai de T diretamente a nosso ponto de destino(Z) e outro que tem como parada o vértice Y. Ao calcular T→Z encontramos uma distância maior que 25, pois para o vértice Z, 25 + 6, resultando em 31, 31>25, portanto é necessário ainda buscar por uma nova rota. Ao se calcular T→Y também é encontrado uma distância maior do que 25, pois para Y, 25 + 11, resultando em 36, 36>25, sendo assim só nos restas calcular a distância de Y→Z é avaliar se a iteração pois o menor caminho do grafo.

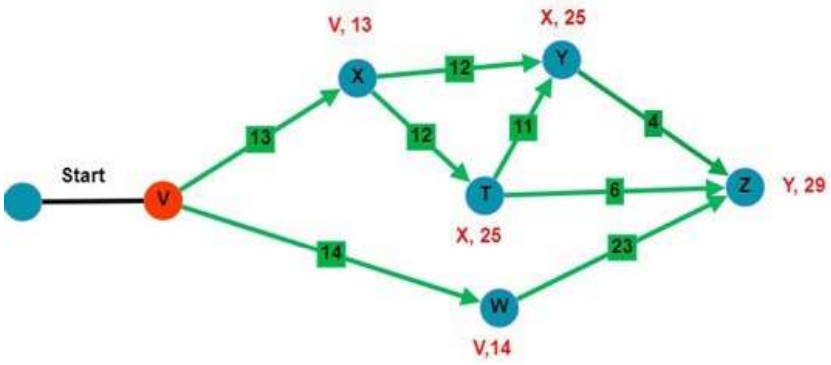
Figura 19 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 4ª iteração



Fontes: Elaborado pelos autores.

Na quinta iteração verificamos por fim o único vértice ainda não visitado, usaremos o menor caminho encontrado até Y, que no caso é 25 tendo X como se predecessor. Com isto podemos calcular de Y→Z, pois para o vértice Z, 25 + 4 resultando em 29, sendo assim o menor caminho encontrado do ponto V até Z, como mostra a figura 20.

Figura 20 - Aplicação do algoritmo de Dijkstra: 5ª iteração



Fonte: Elaborado pelos autores.

Em seguida constrói-se uma tabela que mostra todas as iterações que foram realizadas no processo de avalição

Tabela 5 – Tabela de Iterações

Iteração	Não Resolvidos	Assentou	Nó de avaliação	V	W	X	Y	T	Z
1	V	-	V	0	V- 14	V-13	V-∞	V-∞	V-∞
2	X, W	V	X	0	V-14	V-13	X-25	X-25	V-∞
3	W, Y, T	V, X	W	0	V-14	V-13	X-25	X-25	T-37
4	T, Z, Y	V, X, W	T	0	V-14	V-13	T-36	X-25	T-31
5	Y, Z	V, X, W, T	Y	0	V-14	V-13	T-36	X-25	Y-29
6	Z	V, X, W, T, Y	Z	0	V-14	V-13	T-36	X-25	Y-29
FINAL	-	TUDO	NENHUM	0	V-14	V-14	T-36	X-25	Y-29

Fonte: Elaborado pelos autores.

A notação X-25, por exemplo significado que no vértice X é o predecessor imediato com uma distância total de 25 do vértice V. Por fim podese calcular os caminhos mais curtos do vértice A são os seguintes:

- Vértice X: V→ X a distância total é 13;
- Vértice W: V→ W a distância total é 14;
- Vértice T: V→ X→T a distância total é 25;
- Vértice Y: V→ X→T→Y a distância total é 25;
- Vértice Z: V→ X→T → Y→Z a distância total é de 29;

3.2 Algoritmo de Floyd - Warshall

O algoritmo de Floyd-Warshall é usado para encontrar o par de caminhos mais curto de um vértice em um grafo até uma borda do grafo, tendo ele valores positivos ou negativos, supondo que o caminho T (Q1, Q2, Qj) seja o caminho minimamente ponderado do vértice Q ao vértice J. Os pontos intermediários são extraídos de um subconjunto de vértices (1, 2, ...k) e o algoritmo funciona examinando os pares de caminhos, usando cada vértice como um ponto intermediário.

O intuito deste algoritmo é averiguar a cada iteração se a inclusão de um vértice k intermediário no percurso de i para j pode diminuir o tamanho de um percurso já determinado.

O algoritmo de Floyd-Warshall é responsável por calcular

o menor caminho por meio de todos os pares de vértices em um grafo valorado e orientado. Floyd-Warshall foi propagado pelo informático Robert Floyd em 1966, este algoritmo é o mesmo que foi publicado por Bernard Roy em 1959, e por Stephen Warshall em 1962 a fim de determinar o desfecho transitivo de um grafo. O formato atual do algoritmo com três loops de repetição foi descrito por Peter Ingerman em 1962.

A aplicação do algoritmo ocorre somente no centro de um grafo, e na mediana.

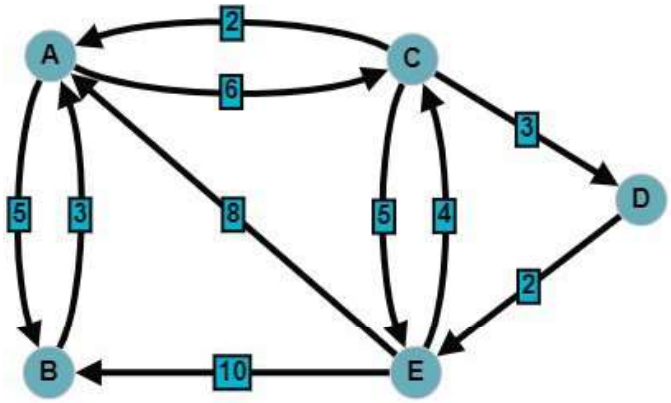
Estruturas do Algoritmo

- Numere os vértices do grafo;
- Defina a matriz inicial (D^0) cujos valores d^0ij sejam correspondentes aos valores das arestas i,j se existir arestas no grafo, caso contrário considere dij= infinito, pois pode existir infinitas maneiras formas de solucionar, e faça os elementos da diagonal da matiz dii = 0 para todo i;
- Para cada k = n, determine sucessivamente os elementos da matriz Dk, a partir dos elementos da matriz Dk-1, utilizando a expressão 1.

$$Dij^k = \min \{dj^{k-1} , dij^{k-1}\} \quad (1)$$

Exemplo da aplicação para cálculo do menor caminho com o algoritmo de Floyd-Warshall

Figura 21 - Exemplo de Dígrafo valorado para cálculo do menor caminho com o algoritmo de Floyd-Warshall.



Fonte: Elaborado pelos autores.

1ª Etapa: Construa a matriz de **DISTÂNCIA**, com as respectivas distâncias.

$$M^0 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

2ª Etapa: Construa a matriz **M^1**

- Para construção de **M^1**, repetir somente os valores da **linha A**, da **coluna A** e a **diagonal da matriz M^0**.
- Com isto na matriz M^1, verifica-se que faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores terá que ser feita a seguinte verificação:

$$\text{Dij} > \text{Dik} + \text{Dkj} \rightarrow \begin{cases} se\ for\ verdade\ a\ afirmação, então\ D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ se\ Não, mantem - se\ o\ valor \end{cases}$$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, por exemplo na matriz M^1 nosso K= A (linha A ; coluna A), na matriz M2 o K será = B (linha B ; coluna B) e assim sucessivamente.

$$M^1=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & & & \\ 2 & & 0 & & \\ \infty & & & 0 & 2 \\ 8 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Resolução:

- para se calcular a célula BC (linha B ; coluna C)

$D_{bc}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dba = 3 \; e \; Dkj = Dac = 6$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dbc > Dba + Dac \\ \infty > 3 + 6 \\ \infty > 9 \; sim, então \; o \; novo \; valor \; de \; Dbc \; será \; 9 \; em \; M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula BD (linha B ; coluna D)

$D_{bd}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dba = 3 \; e \; Dkj = Dad = \infty$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dbd > Dba + Dad \\ \infty > 3 + \infty \\ \infty > 3 + \infty \; ? \; Não, então \; o \; valor \; de \; Dbd \; se \; mantém, isto \; é, \infty \; em \; M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula BE (linha B ; coluna E)

$D_{be}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dba = 3 \; e \; Dkj = Dae = \infty$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dbe > Dba + Dae \\ \infty > 3 + \infty \\ \infty > 3 + \infty \; ? \; Não, então \; o \; valor \; de \; Dbe \; se \; mantém, isto \; é, \infty \; em \; M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula CB (linha C ; coluna B)

$D_{cb}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dca = 3\ e\ Dkj = Dab = \infty$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dcb > Dca + Dab \\ \infty > 2 + 5 \\ \infty > 7\ ?\ Sim\ , então\ o\ valor\ de\ Dcb\ será\ 7, em\ M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula CD (linha C ; coluna D)

$D_{cd}= 3$ e K=A

$$Dik = Dca = 2\ e\ Dkj = Dad = \infty$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dcd > Dca + Dad \\ 3 > 2 + \infty \\ 3 > 2 + \infty\ ?\ Não\ , então\ o\ valor\ de\ Dcd\ se\ mantém, isto\ é, 3\ em\ M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula CE (linha C ; coluna E)

$D_{ce}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dca = 2\ e\ Dkj = Dae = \infty$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dce > Dca + Dae \\ \infty > 2 + \infty \\ \infty > 2 + \infty\ ?\ Não\ , então\ o\ valor\ de\ Dce\ se\ mantém, isto\ é, \infty\ em\ M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula DB (linha D ; coluna B)

$D_{db}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dda = \infty\ e\ Dkj = Dab = 5$$
$$\rightarrow \begin{cases} Ddb > Dda + Dab \\ \infty > \infty + 5 \\ \infty > \infty + 5\ ?\ Não\ , então\ o\ valor\ de\ Ddb\ se\ mantém, isto\ é, \infty\ em\ M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula DC (linha D ; coluna C)

$D_{dc}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dda = \infty \; e \; Dkj = Dac = 6$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dbd > Dba + Dad \\ \infty > \infty + 6 \\ \infty > \infty + 6\,?\; Não\,, então\; o\; valor\; de\; Ddc\; se\; mantém, isto\; é, \infty\; em\; M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula DE (linha D ; coluna E)

$D_{de}= 2$ e K=A

$$Dik = Dda = \infty \; e \; Dkj = Dae = \infty$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dde > Dda + Dae \\ 2 > \infty + \infty \\ 2 > \infty + \infty\,?\; Não\,, então\; o\; valor\; de\; Dde\; se\; mantém, isto\; é, 2\; em\; M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula EB (linha E ; coluna B)

$D_{eb}= 10$ e K=A

$$Dik = Dea = 8 \; e \; Dkj = Dab = 5$$
$$\rightarrow \begin{cases} Deb > Dea + Dab \\ 10 > 8 + 5 \\ 10 > 13\,?\; Não\,, então\; o\; valor\; de\; Deb\; se\; mantém, isto\; é, 10\; em\; M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula EC (linha E ; coluna C)

$D_{ec}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dea = 8 \; e \; Dkj = Dac = 6$$
$$\rightarrow \begin{cases} Dec > Dea + Dac \\ \infty > 8 + 6 \\ \infty > 14\,?\; Sim\,, então\; o\; valor\; de\; Dec\; será\; 14\; em\; M^1 \end{cases}$$

- para se calcular a célula ED (linha E ; coluna D)

$D_{ed}= \infty$ e K=A

$$Dik = Dea = 8\ e\ Dkj = Dad = \infty$$

$$\rightarrow \begin{cases} Ded > Dea + Dad \\ \infty > 8 + \infty \\ \infty > 8 + \infty\ ?\ Não\ , então\ o\ valor\ de\ Ded\ se\ mantém, isto\ é, \infty\ em\ M^1 \end{cases}$$

$$M^{1=}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

3ª Etapa: Construir a matriz **M²**

- Para construção de **M²**, repetir somente os valores da **linha B**, da **coluna B** e a **diagonal da matriz M⁰**.

$$M^{2=}\begin{pmatrix} 0 & 5 & & & \\ 3 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ & 7 & 0 & & \\ & \infty & & 0 & 2 \\ & 10 & & & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M2 faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverão ser feita a verificação:

Dij > Dik + Dkj

$$\rightarrow \begin{cases} se\ for\ verdade\ a\ afirmação, então\ D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ se\ Não, mantem - se\ o\ valor \end{cases}$$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, na matriz M^2 o K será sempre = B (linha B

; coluna B) .

Realizando os cálculos de forma análoga para construir **M¹** obtém-se ➔

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

4ª Etapa: Construir a matriz **M³**

- Para construção de **M³** , repetir somente os valores da **linha C**, da **coluna C** e a *d***iagonal da matriz M⁰**.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & & 6 & & \\ & 0 & 9 & & \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ & & \infty & 0 & \\ & & 4 & & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M³ faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverão ser feita a verificação:

Dij > Dik + Dkj

$$\begin{cases} se\ for\ verdade\ a\ afirmação, então\ D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ se\ Não, mantem - se\ o\ valor \end{cases}$$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, na matriz M³ o K será sempre = C (linha C ; coluna C) .

Realizando os cálculos de forma análoga para construir **M¹** obtém-se ➔

$$M^3=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 18 & 14 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

5ª Etapa: Construir a matriz M4

- Para construção de **M^4**, repetir os valores da **linha D**, da **coluna D** e a **diagonal da matriz M^0**.

$$M^{4=}\begin{pmatrix} 0 & & & 9 & \\ & 0 & & 18 & \\ & & 0 & 3 & \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ & & & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M^2 faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverão ser feita a verificação:

Dij > Dik + Dkj

➔ $\begin{cases} se\ for\ verdade\ a\ afirmação, então\ D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ se\ Não, mantem - se\ o\ valor \end{cases}$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, na matriz M^2 o K será sempre = D (linha D ; coluna D) .

Realizando os cálculos de forma análoga para construir **M^1** obtém-se ➔

$$M^{4=}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 18 & 14 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

6ª Etapa: Construir a matriz **M⁵**

- Para construção de **M⁵**, repetir somente os valores da **linha E**, da **coluna E** e a **diagonal da matriz M⁰**.

$$M^5=\begin{pmatrix} 0 & & & & 11 \\ & 0 & & & 14 \\ & & 0 & & 5 \\ & & & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica-se que na matriz M^5 faltará valores para completar a matriz, para encontrar tal valores deverão ser feita a verificação:

Dij > Dik + Dkj

➔ $\begin{cases} se\ for\ verdade\ a\ afirmação, então\ D_{ij} = D_{ik} + D_{kj} \\ se\ Não, mantem - se\ o\ valor \end{cases}$

- K, sempre será a linha e a coluna que estamos analisando, na matriz M^5 o K será sempre = E (linha E ; coluna E) .

Realizando os cálculos de forma análoga para construir **M¹** obtém-se ➔

$$M^5=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 18 & 14 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ 16 & 16 & 10 & 0 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Essa M^5 é a matriz que fornece o menor caminho entre todos os vértices pelo **Algoritmo de Floyd-Warshall**, que pode ser melhor representada pela tabela 6, a seguir:

Tabela 6 - Fornece o menor caminho entre todos os vértices pelo **Algoritmo de Floyd-Warshall**

	A	B 5	C 6	D	E 11
A	0			9	
B	3	0	9	18	14
C	2	7	0	3	5
D	16	16	10	0	2
E	6	10	4	7	0

O Algoritmo de Floyd-Warshall é um algoritmo recursivo que utiliza a recursão que é um método de resolução de problemas que envolva desdobrar um problema.

Em sub-problemas menores e assim sucessivamente até chegar a um problema elementar, o suficiente para que este possa ser resolvido facilmente.

4 Considerações finais

Compreender que a interpretação de um problema pode ser transcrita por meio de uma modelagem antes de encontrar sua solução, nesse caso a utilização de um desenho (grafo) para modelar problemas amplia o conhecimento do aluno e oferece ferramentas adequadas para tomada de decisões na busca de uma solução, a qual pode ser obtida manualmente ou com o auxílio de um computador com novas oportunidades de aprendizagem até mesmo em outras disciplinas e assuntos que não sejam a Matemática.

As propostas de atividades levantam a possibilidade de teoria dos grafos ser inserida complementarmente em alguns conteúdos, como conjuntos ou matrizes.

Tendo em vistas as aplicações de grafos e a importância de seu uso em determinadas áreas, desde o tradicional problema das sete pontes de Konigsberg, até mesmo com o encontro do mesmo em menores caminhos, acreditamos que a modelagem de um problema em grafos propicia aos alunos a pensar, a entender o

abstrato e a inferir sobre várias proposições colocadas tornando-se uma técnica ou procedimento capaz de ajudá-lo a tomar decisões mais adequadas para resolver inúmeros problemas.

Referências

A teoria dos grafos e sua abordagem na sala de aula com recursos educacionais digitais / Flavia Fernanda Favaro. - Rio Claro, 2017. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Aplicações da Matemática: Redes Sociais, Jogos, Engenharia, Profº Fábio Protti (IC-UFF/RJ).

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo. Editora Edgard Blucher Ltda, 2003.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo / JURKIEWICZ, Samuel. Grafos: Introdução e prática. - São Paulo. Editora Edgard Blucher, 2009.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza e Matemática e suas tecnologias. MEC. 2000.

BRASIL. Secretária de Educação Básica. Base Nacional Curricular Comum: educação é a base. Brasília: MEC; SEB, 2017.

CAMINHOS e ciclos em grafos. [S. l.], 8 abr. 2017. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/paths-andcycles.html. Acesso em: 17 maio 2021.

CONCEITO Básicos da Teoria de Grafos. Disponível em: https://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html. Acesso em: 14 set. 2021.

DA SILVA, Luiz Fernando. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO1. **Curso de Especialização em M, Mídias Digitais, e didática para educação Básica matemática**, p. 1-27.

EXERCÍCIOS de Teoria dos Grafos. [S. l.], 27 set. 2017. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/. Acesso em: 6 out. 2021.

GRAFO 12 jul. 2012. Disponível em: https://w kiciencias.

casadasciencias.org/wiki/index.php/Grafo. Acesso em: 4 ago. 2021.

GRAFOS (não-dirigidos). [S. l.], 23 nov. 2020. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/ugraphs.html#exr:ches s-knight. Acesso em: 9 jul. 2021.

Grafos e suas aplicações, Fabiana Nascimento Santos Cavalcante e Severino Domingos da Silva (PUC/RS).

MARINS, Fernando Augusto Silva. Introdução à Pesquisa Operacional. Cultura acadêmica, 2011.

Parâmetros curriculares nacionais: Ciências Naturais / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

Introdução à Teoria dos Grafos, Profª Sheila Almeida e Mayara Omai (UTFPR/PG)

INTEIROS DE GAUSS: os números primos complexos

Gabriela Moura Ferreira
Licencianda em Matemática - Uni-FACEF
gabi.gabrielamouraferreira@gmail.com

Dr. Antônio Carlos da Silva Filho
Doutor em Física - Uni-FACEF
acdasf@bol.com.br

1 Introdução

O estudo dos números primos tem seduzido os matemáticos ao longo destes últimos séculos. Uma das razões pelas quais o tema atingiu maior destaque é o atual problema matemático não resolvido considerado um dos mais importantes da história, a Hipótese de Riemann, apresentada pela primeira vez em 1859, elaborada por aquele de quem recebe o nome, o matemático alemão Bernhard Riemann.

> A hipótese de Riemann é o problema da longitude da matemática. Sua solução nos dará a perspectiva de mapear as águas nebulosas do grande oceano dos números, representando somente o início da nossa compreensão sobre esses elementos da natureza. Se conseguirmos desvendar o segredo da navegação pelos primos, quem sabe o que haverá mais além, ainda por descobrir? (DU SAUTOY, 2004)

Diferente dos demais problemas matemáticos não comprovados, mas também não refutados, que usualmente recebem o nome de conjectura, o proposto por Riemann hoje é chamado de hipótese, pois sua prova validará diversos outros trabalhos, não somente na área de matemática, mas também na física e na computação, que dependem exclusivamente da mesma para estarem provados, uma vez que também não foram refutados.

Desde os primórdios, os matemáticos identificaram

a importância da classificação dos números de acordo com as propriedades que eles apresentam perante a natureza. Primeiramente, estabeleceu-se que os números inteiros são divididos em duas categorias: primos e compostos.

No conjunto dos números naturais, um número primo p é aquele que só pode ser dividido por *p* ou por *1*. Se aumentarmos o universo para o conjunto dos números inteiros, um número *p* será considerado primo se só puder ser dividido por *p*, *-p*, *1* ou *-1*. Os números compostos são aqueles formados pela multiplicação de números primos.

Inicialmente, os gregos se preocuparam em provar que os números inteiros só poderiam ser classificados desta maneira, pois não haveria nenhum número pária que não fosse primo ou composto. Em seguida, Euclides explica o que pode ser considerado como o primeiro momento brilhante de raciocínio matemático, a verdade simples e fundamental sobre os números primos: há um número infinito deles. Ele foi o responsável por demonstrar a maneira de se construir um número que não pudesse ser gerado por qualquer lista finita de primos que lhe fosse dada.

Ainda assim, por muitos anos a pergunta mais importante sobre os números primos foi, e ainda é: como saber qual será o próximo? De que maneira eles se comportam? Na tentativa de desvendar as propriedades dos números primos, entre 1808 e 1825, o célebre matemático Carl Friedrich Gauss, estava investigando propriedades relacionadas à reciprocidade cúbica e à reciprocidade quadrática. Durante o período, Gauss percebeu que determinados números complexos da forma $a+bi$, com a e b inteiros e $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$, eram raízes de polinômios da forma $a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \cdots + a_1\ x + a_0 = 0$, onde todos os coeficientes dos termos $x^k, com\ 0 \leq k \leq n$, são números inteiros.

Homenageando Gauss, esses números complexos foram chamados posteriormente de números inteiros de Gauss ou números inteiros gaussianos. A forma como foram aplicados,

em conjunto com o fato de muito da teoria de Euclides sobre as propriedades dos números inteiros poder ser transportada para a nova aplicação, foram essenciais para desencadear o vasto campo matemático conhecido como Teoria dos Números Algébricos. Neste campo, dos Inteiros de Gauss, pode-se fazer uma generalização da definição dos números primos, que é (GETHNER et al., 1998):

1. Se a, $b \neq 0$, então $a + b*i$ é um Primo de Gauss se, e somente se, $a^2 + b^2 = p$, onde p é um número primo no campo dos números inteiros;
2. Um inteiro gaussiano da forma a ou $a*i$, com a pertencendo ao conjunto dos números inteiros, é um Primo de Gauss se, e somente se, a é um número primo e o resto da divisão do módulo de a por *4* for *3*.

2 Os Inteiros de Gauss

Em Teoria dos Números Algébricos, há uma importante classificação dos números em dois grupos, números algébricos e números transcendentes. Para que um número seja considerado algébrico ele deve ser raiz de uma equação polinomial da forma $a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \cdots + a_1\ x + a_0 = 0$ onde todos os coeficientes dos termos x^k,com 0≤k ≤n, são inteiros. Exemplos de números algébricos:

$$i \rightarrow x^2 + 1 = 0\ ;\ \sqrt{2} \rightarrow x^2 - 2 = 0$$

Quando um número não atende à condição necessária para ser um inteiro algébrico, ele é classificado como número transcendente (PACCI e RODRIGUES, 2013). Todos os números transcendentes são números irracionais, porém a recíproca não é válida pois, como vimos no exemplo acima, $\sqrt{2}$ é um número irracional que ao mesmo tempo é um inteiro algébrico, comprovando que não necessariamente um número irracional será transcendente.

Podemos citar como exemplos de números transcendentes o número de Euler (*e*), e o número π.

Os números Inteiros de Gauss estão contidos no conjunto dos números algébricos, ou seja, satisfazem a condição de serem raízes de uma equação polinomial com os coeficientes inteiros e, ainda, são números complexos específicos, que possuem parte real e parte imaginária pertencentes ao conjunto dos números inteiros, além da unidade imaginária *i* equivaler a $\sqrt{(-1)}$. A representação é feita pelo conjunto $Z_{[i]}=\{a+bi \,/\, a,b \in \mathbb{Z} \; e \; i^2=-1\}$.

Os números inteiros gaussianos possuem algumas propriedades e particularidades de suma importância para o desenvolvimento do conceito de número primo complexo (COSTA, 2016). Dentre elas, verificaremos: Norma, Unidades, Divisão Euclidiana, Lema de Euclides e Fatoração Única.

A Norma, estabelece que: $\forall z \in \mathbb{Z}_+, N(z) = z.\bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado do complexo z. Sabemos que para um determinado número complexo da forma $z=a+bi$, o conjugado dele é definido como $\bar{z} = a - bi$. E como dados dois números complexos da mesma forma pré-determinada, denominados a e b, temos que: $\overline{ab} = \bar{a}\,.\,\bar{b}$, então $N(a).N(b) = a.\bar{a}\,.\,b.\bar{b} = a.b.\bar{a}\,.\,\bar{b} = ab.\overline{ab} = N(ab)$ o que nos comprova a propriedade multiplicativa da norma.

Dentro do conjunto dos Inteiros de Gauss, todo elemento $z \neq (0,0)$ possui um inverso z' tal que $z.z^{-1}=1$, o que implica em $N(z.z')=N(z).N(z')=1$ como demonstraremos a seguir:

1. Considerando primeiramente que z.z'=1, temos que:

$$z.z' = 1 \rightarrow \overline{zz'} = 1 \rightarrow N(z.z') = (1)^2.(1)^2 = 1$$

2. Agora, considerando z= a+bi, ficamos com:

$$z' = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = N(z)$$

$$|z'|^2 = \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow N(z).N(z') = (a^2+b^2).\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right) = 1$$

Assim, mostramos também que se $N(z) = a^2+b^2 = 1$, então teremos duas possibilidades de valores para a e b em $Z_{[i]}$, resultando em quatro possíveis números complexos que são unidade dos Inteiros de Gauss:

$$\begin{cases} a = \pm 1 \; e \; b = 0 \begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_2 = -1 \end{cases} \\ a = a \; e \; b = \pm 1 \begin{cases} Z_3 = i \\ Z_4 = -i \end{cases} \end{cases}$$

Portanto, $x \in Z_{[i]}$ é $unidade \leftrightarrow N(x)=1$.

Tratando agora da Divisão Euclidiana, precisamos ter o conhecimento inicial do conceito de divisibilidade, que nada mais é que: para $a, b \in Z_{[i]}, a|b \; se \; \exists c \in Z_{[i]} \; tal \; que \; b = ac$. Partindo deste ponto, a existência de $q, r \in Z_{[i]}, \forall a, b \in Z_{[i]}, b \neq 0 / a = bq + r, sendo \; 0 \leq N(r) < N(b)$.

A demonstração se dá através da divisão de a por b, representada como b|a (lê-se b divide a), sendo que $a = x + yi \; e \; b = z + wi \; com \; x, y, z \; e \; w \in \mathbb{Z}$. Vejamos:

$$\frac{a}{b} = \frac{x+yi}{z+wi} = \frac{x+yi}{z+wi} \cdot \frac{z-wi}{z-wi} \Leftrightarrow \frac{xz - xwi + yzi - ywi^2}{z^2+w^2} = \frac{xz+yw}{z^2+w^2} + \frac{yz-xw}{z^2+w^2} i$$

Considerando que m é o inteiro mais próximo de $\frac{xz+yw}{z^2+w^2}$ e n o inteiro mais próximo de $\frac{yz-xw}{z^2+w^2}$ teremos que $\left|m - \frac{xz+yw}{z^2+w^2}\right|, \left|n - \frac{yz-xw}{z^2+w^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ e ainda, considerando que $q=(m+ni)$ teremos:

$$r = a - bq = b\left(\frac{a}{b} - q\right) = b\left[\left(\frac{xz+yw}{z^2+w^2} + \left(\frac{yz-xw}{z^2+w^2}\right) i\right) - m + ni\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(r) \leq N(b)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{N(b)}{2} < N(b)$$

O Lema de Euclides nos diz que se p é um primo de Gauss, então sendo $a, b \in Z_{[i]}, p|ab \Rightarrow p|a \; ou \; p|b$ (PISSINI e MAIOCHI, 2013). Para que um número seja primo de Gauss, é necessário que o mesmo não possa ser escrito na forma de produto entre de dois inteiros de Gauss cujas normas sejam maiores que

1. Estando compreendida a divisão euclidiana, é possível realizar a demonstração do lema através de sucessivas aplicações da mesma.

Uma das propriedades mais utilizadas para resolução de problemas com números inteiros, é a fatoração única, que pode ser provada para os inteiros gaussianos seguindo as etapas de, primeiramente, verificar que todo inteiro de Gauss z, com N(z) > 1, pode ser escrito como o produto de um ou mais primos de Gauss. Tomando N(z) = 2, temos o próprio 2 um número primo e pela norma ser multiplicativa, então z é um número primo.

Agora, ao considerarmos N(z) > 2, passamos a ter duas possibilidades. A primeira é, se z for um número primo, imediatamente temos a prova da fatoração. E, se z não for um número primo, ficaremos com:

$$z = a.b \Rightarrow N(z) = N(a).N(b)\,; N(a) > 1\, e\, N(b) > 1 \therefore N(a) < N(z)\, e\, N(b) < N(z)$$

Através de indução finita, podemos supor que se N(x) < N(z), teremos x um número fatorável, o que implica em a e b fatoráveis, assim como o próprio z. Gauss realizou a comprovação de que a fatoração é única para o anel dos gaussianos, assim como para os inteiros (SCHAFASCHEK, 2016). De forma sucinta, temos as operações de adição e multiplicação, bem como a fatoração única, aplicáveis aos Inteiros de Gauss. Agora, se tratando de divisibilidade, a complexidade é maior, como entenderemos a seguir.

3 Os primos de Gauss

Para que possamos compreender quais números inteiros de Gauss apresentarão a característica de número primo de Gauss, é importante seguir o raciocínio de que, para um número p ser considerado primo, no conjunto $\mathbb{Z}$, ele precisa, necessariamente, ser divisível apenas por p, $-p$, 1 ou -1. Quando expandimos a

possibilidade de que um número p seja primo, no conjunto $Z_{[i]}$, um número que é primo em $\mathbb{Z}$ pode não ser primo em $Z_{[i]}$. Veja o exemplo a seguir:

$$(1-2i).(1+2i) = 1+2i-2i-4i^2 = 1-4.(-1) = 1+4 = 5$$

O número 5, quando considerado no conjunto dos números inteiros, é um número primo, mas se o considerarmos dentro do conjunto dos inteiros gaussianos, como mostrado acima, não podemos classificá-lo como primo, uma vez que pode ser decomposto em um produto de dois inteiros de Gauss.

Por definição, um número inteiro de Gauss será um número primo de Gauss se, e somente se, dividir exatamente um primo inteiro (tanto o valor positivo, como seu oposto negativo), em $\mathbb{Z}$. Assim, tomaremos p como um primo inteiro e positivo e N(π) um primo, também em Z. π é um primo de Gauss pois, se π é fatorável, N(π) também é fatorável. Temos três possíveis casos:

1. Se p é par, então só podemos ter $p = 2$ e, como π = a + bi, $a^2 + b^2 = 2 \Leftrightarrow \pi = \pm 1 \pm i$, obtendo assim, o quatro números primos de Gauss: 1+i, 1-i, -1+i e -1-i.

2. Se p for ímpar e da forma $p \equiv 3(mód.4)$, teremos $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \equiv 0\ ou\ 1\ (mód.4)$ e, se existisse $\pi = c+di$, com c e d $\in \mathbb{Z}$ e $1 < N(\pi) < p^2$. Temos que $p = \pi\varphi$ e, por p ser um primo inteiro, $\varphi = c-di$. Levando a $p = c^2 + d^2 \equiv 0, 1\ ou\ 2\ (mód.4)$ o que é absurdo, uma vez que $p = 4k+3$. Assim, p é um primo de Gauss.

3. Se p for ímpar e da forma $p \equiv 1(mód.4)$, então, sendo $x = 1\times2\times \ldots \times \frac{(p-1)}{2}$ teremos que $x^2 \equiv 1\times2\times \ldots \times \frac{(p-1)}{2} \times 1\times2\times \ldots \times \frac{(p-1)}{2} \equiv 1\times2\times \ldots \times \frac{(p-1)}{2} \times \frac{(p+1)}{2} \times \ldots \times (p-2)\times(p-1) \equiv 1\times(p-1) \equiv -1(mód.p)$. Logo, $p|x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. Como π é um primo de Gauss que divide p, então $\pi \in \mathbb{Z}$, π|x + i ou π|x – i ⇒ π|1, o que é um absurdo. Portanto $\pi \notin Z_{[i]}$ tal que $p = \pi\varphi$. Seja π = a +

bi e $\varphi = c + di$, com a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$. Como p é primo em $\mathbb{Z}$, então mdc(a;b) = mdc(c;d) = 1. Temos p = (a + bi)(c + di) = ac – bd + (bc + ad)i. Como p $\in \mathbb{Z}$, então $p|x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ ou (a = –c e b =d) $\Leftrightarrow \varphi = \pm \pi$. Como p > 0, então $\varphi = \pi \Rightarrow N(\pi) = p$, logo π é primo (e π e seu conjugado são os únicos primos de Gauss que dividem p).

4 Considerações finais

Assim, concluímos que para um número inteiro de Gauss ser considerado um número primo de Gauss, ou seja, um número primo no domínio do Conjunto dos Complexos, $\mathbb{C}$, é necessário que aconteça uma das duas opções:

1. Se a, $b \neq 0$, então $a + b*i$ é um Primo de Gauss se, e somente se, $a^2 + b^2 = p$, onde p é um número primo no campo dos números inteiros;
2. Um inteiro gaussiano da forma a ou $a*i$, com a pertencendo ao conjunto dos números inteiros, é um Primo de Gauss se, e somente se, a é um número primo e o resto da divisão do módulo de a por 4 for 3.

E, de todas as propriedades vistas a cerca do anel dos gaussianos, podemos apresentar da seguinte maneira, suas propriedades:

1. As unidades, ou seja, os elementos inversíveis são: ±1 e ±i;
2. O Domínio é Fatorial, ou seja, para qualquer que seja a pertencente ao domínio e não pertencente ao conjunto das unidades do domínio, pela comprovação da fatoração única para os inteiros gaussianos, mantém-se a integridade do domínio, sendo o mesmo irredutível, uma vez que a propriedade da fatoração única é válida;

3. Através da norma $N(a+bi) = a^2+b^2$ pode se tornar um Domínio Euclidiano, uma vez que o algoritmo de Euclides para a divisão pode ser aplicado.

Referências

CAMPOLINA PACCI, D.; TAKEUTI VAZ RODRIGUES, C. Inteiros de Gauss. Campinas: UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, 2013. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/DC_M2_FM_2013.pdf. Acesso em: 09 de abril de 2021.

COSTA, Icoracy Coutinho da. *Inteiros de Gauss*: uma abordagem elementar. Manaus: Universidade Federal do Amazonas, 2016. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5074. Acesso em 31 de outubro de 2021.

DU SAUTOY, Marcus. *A música dos números primos*: a história de um problema não resolvido na matemática. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

GETHNER, E.; WAGON, S. & WICK, B. A Stroll Through the Gaussian Primes. The American Mathematical Monthlly, vol. 105, p. 327-337, 1998.

MORETTO PISSINI, Mariana., ALMEIDA MAIOCHI, Marina de. Inteiros de Gauss. Campinas: UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, 2013. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/MM_M2_FM_2013.pdf. Acesso em: 18 de julho de 2021.

SIMON SCHAFASCHEK, Gabriel. Uma introdução ao estudo dos números algébricos. Florianópolis: UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. Disponível em: https://www.escavador.com/sobre/560614278/gabriel-simon-schafaschek. Acesso em: 12 de setembro de 2021.

METODOLOGIA ATIVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: experiências e visões de alguns professores

Aline Rosa Rodrigues
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
alinerosarodrigues12@gmail.com

Bianca Cecília Silva
Licencianda em Matemática – Uni-FACEF
biancaceciliasilva@hotmail.com

Dra. Silvia Regina Viel
Doutora em Educação Matemática – Uni-FACEF
silviarviel@gmail.com

1 Introdução

Considerando a forma tradicional que a matemática é ensinada ao longo dos anos e o preconceito que os estudantes têm com a matemática, nota-se a necessidade de uma nova metodologia para ensinar essa disciplina. Assim como diz Pavlov, um estímulo diferente pode desencadear respostas e aprendizados que anteriormente não foram obtidos, desta forma, será analisado com professores atuantes na área, a eficiência da metodologia ativa em sala de aula.

De acordo com o educador Paulo Freire (2015), um dos maiores problemas da educação é o fato dos alunos não serem incentivados para um pensamento independente. Para amenizar essa situação, o professor deve proporcionar um ambiente em que o aluno possa refletir e reconhecer seus ideais, expressando seus pontos de vista e opiniões. Tudo isso é importante para que os estudantes possam aprender diversas maneiras de analisar determinadas situações.

Em todas as etapas do desenvolvimento da humanidade, a matemática esteve presente, de todas as formas. Foi a sua existência que deu impulso ao nascimento de grandes civilizações

e grandes descobertas científicas. E a metodologia ativa nos possibilita questionarmos nossos alunos a encontrar a matemática estudada em sala de aula no seu cotidiano. Além disso, ela pode despertar a curiosidade, valorizando, portanto, as contribuições dos alunos nas aulas.

Os métodos de ensino devem seguir este objetivo, ou seja, proporcionar aos alunos uma educação mais agradável, para que eles tenham motivação e entusiasmo para participarem de atividades diversas e com diferentes níveis dificuldades. Hoje em dia, a educação transformadora ganha destaque, temos jovens nativos digitais que estão sempre expostos a mais tecnologia e informação. Portanto, educar os alunos de uma forma positiva e criativa permitirá que eles atinjam o auge do aprendizado. Sendo assim, o objetivo do artigo é evidenciar a eficácia da metodologia ativa no ensino dos conteúdos matemáticos ensinados no ensino fundamental – anos finais e no ensino médio.

Conforme os estudos realizados no artigo “Metodologia Ativa no Ensino da Matemática” (RODRIGUES; SILVA; VIEL, 2021), podemos refletir o quanto a metodologia ativa pode ser apropriada para a sala de aula, entretanto, não se tem muito conhecimento desta metodologia na prática. Por essa razão, para que se possa verificar essa eficiência em aula, foi realizada uma pesquisa de campo com professores do ensino fundamental – anos finais e do ensino médio para que eles pudessem relatar suas experiências com a aplicação da metodologia ativa.

Neste artigo, será apresentado a visão e as experiências de professores de matemática com o uso da metodologia ativa, mostrando suas percepções do processo de ensino-aprendizagem, juntamente com o papel que o professor exerce em relação à qualidade do ensino. Além disso, pode-se perceber a importância de os professores conhecerem novos métodos de ensinar, sempre levando em consideração o desenvolvimento da sociedade atual.

Tendo em vista os benefícios da metodologia ativa em

sala de aula, será realizada uma discussão com os relatos dos professores que participaram da pesquisa de campo, para que possamos constatar a eficácia da metodologia ativa na prática.

2 Metodologia ativa

Segundo Moran (2018), para se ter uma aprendizagem significativa, o aluno precisa ter um conhecimento gradual, no qual irá adquirir habilidades dos níveis básico para o mais avançado, e desta forma irá conseguir aplicar essas habilidades no seu cotidiano. Tendo em vista a sociedade que vivemos, esse pensamento é extremamente importante, sabendo do grande avanço da tecnologia no dia a dia da população. Desde meados do século XX, Dewey (2010) já notava que a sociedade passava por essas mudanças, percebendo assim, a necessidade de jovens e crianças para uma educação que não fossem somente ouvintes, todavia se tornassem ativos em sua aprendizagem.

Essa mudança só ocorre na aprendizagem se ela for significativa, segundo Moreira (2006, p.13), para que a aprendizagem seja significativa é necessária uma propensão para aprender, que significa ter atitudes e sentimentos positivos que facilitam a aprendizagem. Assim, os professores precisam adaptar o método de ensino utilizado em aula.

> Quando o acesso às informações era mais restrito, o método tradicional era propício, assim o professor transmitia as informações e por isso se tornava muito significativo. Hoje por meio da Internet e das tecnologias, podemos estudar com muitas pessoas diferentes em qualquer lugar e a qualquer hora. Sendo assim, para aprender existe uma enorme flexibilidade e possibilidade em uma sociedade altamente conectada. (RODRIGUES, Aline; VIEL, Silvia; SILVA, Bianca, 2021).

Segundo Piaget (1977), a excelência da educação não é aprender ao máximo, no entanto, é antes aprender a aprender, aprender a se desenvolver e desenvolver o que foi aprendido no seu cotidiano. Como foi discutido no por Viel, Rodrigues e Silva (2021), a metodologia ativa salienta o protagonismo do aluno, seu envolvimento em todas as etapas do processo aprendizagem, fazendo com que ele crie, experiente, lembrando que todo esse desenvolvimento é sob a orientação do professor, que é considerado mediador do conhecimento.

A matemática é considerada, por muitos, como uma ciência que só pode ser desenvolvida e explicada de uma única maneira, todavia não é apenas dessa forma que se obtém resultados, podemos ensiná-la de maneira descontraída e contextualizada. Smole (2008), afirma que os estudantes precisam aprender a se comunicar matematicamente, porque desta forma eles são estimulados a ter espírito de questionamentos e são levados a pensar e a comunicar ideias.

Segundo a BNCC, a formação do professor também deve se pautar pela atividade criadora, reflexiva, crítica, compartilhada e de convivência com as diferenças, usando as mídias e as tecnologias como linguagem e instrumento da cultura, estruturantes do pensamento, do currículo, das metodologias e das relações pedagógicas. Assim, exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Considerando as ideias anteriores, pode-se perceber a importância da metodologia ativa, visto que reformula a visão de ensino-aprendizagem, transformando positivamente a dinâmica da sala de aula. Com a pesquisa de campo realizada, foi analisado com os professores de matemática essas diferentes práticas de

aprendizagem, o que foi utilizado por eles e quais os resultados obtidos.

3 Análise de dados e informações

Para verificarmos a eficácia da prática da metodologia ativa no ensino da matemática, foi realizado uma pesquisa de campo com os professores de matemática do ensino fundamental – anos finais e do ensino médio, teve cunho qualitativo e foi realizada através de um questionário no Forms (ferramenta da plataforma Google), tendo em vista o cenário que o país se encontrava. O estudo busca compreender os resultados, o quanto os professores entendem de metodologia ativa, o quanto colocam em prática, e se colocam na prática, poder analisar sua eficiência na aprendizagem do aluno no ensino da matemática.

A pesquisa contou com a participação de 13 professores de matemática, que possuem tempo de atuação variado, tendo alguns até 5 anos na docência e outros que já estão há mais de 15 anos. Sendo todos eles formados em matemática, fazem parte do corpo docente de escolas, de Franca – SP e da região de São Joaquim da Barra – SP. Os docentes participantes, são na maioria, 9 deles, de escolas particulares, os outros 4 atuam em escolas públicas.

A tabela a seguir fornece o tempo de atuação de cada professor e em qual ensino ele atua, dados sobre os professores participantes que podem ser importantes para as reflexões que eles trazem.

Tabela 1 – Tempo e ensino de atuação dos docentes

DOCENTE:	QUANTO TEMPO ATUA COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	QUAL ENSINO ATUA
A	ATÉ 5 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
B	ATÉ 5 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
C	ATÉ 5 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS E ENSINO MÉDIO
D	10 – 15 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS E ENSINO MÉDIO
E	ATÉ 5 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
F	ATÉ 5 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS E ENSINO MÉDIO
G	10 – 15 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
H	5 – 10 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS E ENSINO MÉDIO
I	5 – 10 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
J	10 – 15 ANOS	ENSINO MÉDIO
K	MAIS DE 15 ANOS	ENSINO MÉDIO
L	MAIS DE 15 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS E ENSINO MÉDIO
M	5 – 10 ANOS	ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS E ENSINO MÉDIO

Fonte: Autoras, 2021.

O questionário foi constituído por oito perguntas, as quais foram elaboradas de forma para que se pudesse analisar o tempo de formação/atuação e as experiências vividas pelos docentes com a metodologia ativa, a tabela a seguir consta as perguntas contidas no questionário.

Tabela 2 – Questões elaboradas no questionário

	PERGUNTAS
1	Há quanto tempo atua como professor de matemática?
2	Em qual ensino você atua?
3	Há quanto tempo trabalha no ensino assinalado na questão anterior?
4	Qual a sua concepção do processo de ensino aprendizagem com os educandos no Ensino Fundamental- anos finais e no Ensino Médio?
5	Quanto ás necessidades de mudança e/ou transformação no processo pedagógico das escolas, elenque o que considera como prioridade.
6	Você conhece a metodologia ativa? Se sim, quais seus conhecimentos sobre ela?
7	Já utilizou a metodologia ativa na sala de aula? Se sim, quais foram os resultados?
8	O que você como professor faz para transformar a visão de seus alunos quanto a aprendizagem da matemática?

Fonte: Autoras, 2021.

A primeira pergunta foi referente ao tempo de atuação do professor na área de matemática. Consideramos importante esse questionamento, porque segundo Ferreira (2012) a metodologia do ensino de matemática foi introduzida nas faculdades de licenciatura apenas nos anos de 1990, o qual o principal objetivo é oferecer subsídios didático-pedagógicos aos graduandos na área. Desta forma, professores que se formaram neste período ou em anos próximos tem uma visão e metodologia diferente dos professores que estão formados há menos tempo.

A segunda pergunta foi referente à qual ensino o professor atua, se é no ensino fundamental – anos finais ou no ensino médio, esse questionamento é importante para que se possa analisar a forma na qual o professor precisa conduzir sua aula e quais os resultados da metodologia ativa nessas duas etapas do ensino. E a terceira pergunta foi para complementar, perguntando a quanto

tempo o professor atua nesse ensino.

Tendo em vista ainda que o processo de ensino-aprendizagem no ensino fundamental- anos finais e no ensino médio são distintos, a quarta pergunta foi um questionamento para que os professores pudessem relatar quais as suas concepções destas diferenças, o que é necessário para ter a atenção do estudante em cada etapa, nessa parte o professor já poderia contar um pouco de suas experiências na sala de aula.

A próxima questão colocada no questionário, foi sobre as necessidades de mudança no processo pedagógico das escolas. Da percepção do professor, o que precisa de alteração para uma melhora significativa na aprendizagem dos discentes.

Após essas questões que visavam verificar os ideais dos professores quanto sua atuação no ensino da matemática, foi incorporado as perguntas referentes a metodologia ativa. Contudo, antes de saber se o professor já havia utilizado essa metodologia, é necessário saber se ele a conhece e o que conhece. Desta forma, a sexta pergunta foi sobre o conhecimento do professor na metodologia ativa.

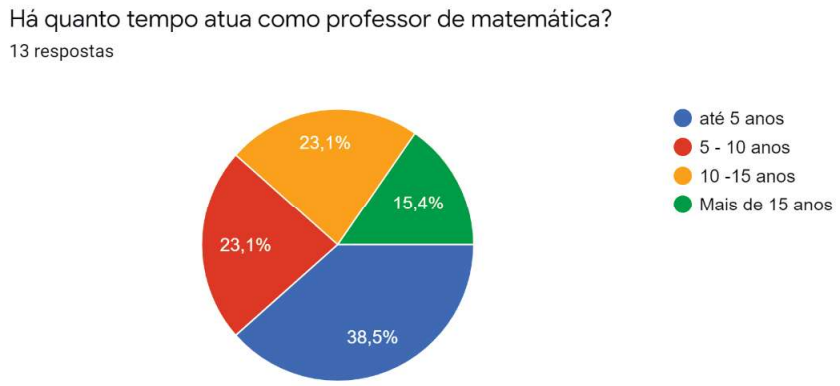
Depois de saber o que o professor conhecia, foi perguntado se ele já havia utilizado algo em suas aulas e caso tivesse, quais foram os resultados obtidos. Nesta questão, o intuito foi conhecer um pouco mais das experiências dos professores com a metodologia ativa, para que se possa verificar a sua eficácia na prática.

Na última pergunta, indagamos os professores sobre o que eles fazem de diferente em suas aulas para mudar a visão dos alunos de que a matemática é algo complexo, para fazer com que eles entendam e gostem. Essa pergunta foi realizada, pois na metodologia ativa o principal foco do ensino aprendizagem é o aluno, assim, ao questioná-los queremos verificar se os professores atuantes estão olhando para esse processo como um todo.

Os próximos gráficos a serem apresentados relacionam os participantes em relação ao tempo que atuam e o ensino que

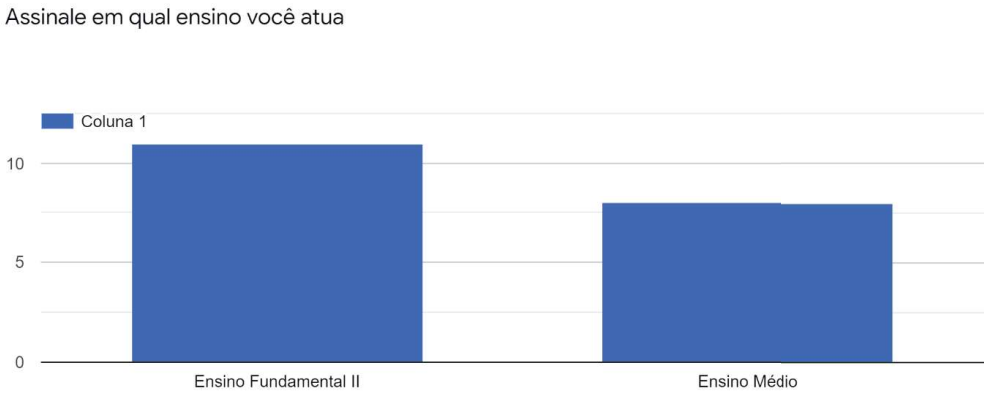
atuam:

Gráfico 1 – Tempo de atuação dos professores



Fonte: Autoras, 2021.

Gráfico 2 – Ensino atuante



Fonte: Autoras, 2021.

Considerando que o questionário contou com professores de diferentes tempos de atuação, faz com que a pesquisa tenha uma visão mais ampla em relação se são professores mais novos ou professores com mais tempo dentro de sala de aula. Como é mencionado pelo docente J, que na sua graduação as metodologias

não foram conteúdos mencionados e estudados, o que ele conhece disso (da metodologia ativa) foi ao longo do seu trabalho, através de palestras assistidas. Isso mostra a importância de uma boa formação acadêmica, para que o docente possa ensinar de forma que consiga ensinar com qualidade todos os alunos.

A seguir será apresentado todas as perguntas e as respectivas respostas dos professores:

3.1 PERGUNTA 4 – Qual a sua concepção do processo de ensino aprendizagem com os educandos no Ensino Fundamental- anos finais e no Ensino Médio?

DOCENTE:	**RESPOSTA:**
A.	Ele envolve toda a prática de ensino e a forma como o aluno absorve e usa o que aprendeu
B.	Bem, é algo muito particular de cada aluno. Tenho alunos que exercem um protagonismo em sala de aula, ou seja, eles são alunos ativos, que buscam o aprender como uma via de ascensão – pessoal e/ou profissional. Mas não é nesses alunos que podemos ver como está o processo de ensino aprendizagem, e sim nos alunos que não sentem incentivados e muitas vezes se veem “obrigados” (não achei outro termo) a estudar, assim é possível notar que o processo é muitas vezes falho com o aluno – seja na escola pública ou particular – já que todos os projetos querem que o aluno esteja mais tempo em sala de aula, mas não se importando com a qualidade e o bem estar do aluno, visa-se um aluno e sua formação integral, mas não apresenta possibilidades reais para esse aluno se formar. Na área da matemática, o processo de ensino e aprendizagem está cada vez mais retroagindo, uma vez que pelos alunos não terem um contato lúdico com a matemática nós anos iniciais – visto por muitos um momento adequado para a formação do aluno – eles carregam para os anos posteriores essa necessidade e, com isso, vejo que os alunos se sentem "mal" por não entenderem conceitos elementares e acabam tachando a matemática como chata, e, quando a matemática é

apresentada de forma lúdica, chegam a dizer que é coisa de "criança".

C. Converso muito com os alunos, esclareço as dúvidas, extraio informações, tento ao máximo trazer a realidade deles pra "dentro da matemática", analiso a forma de raciocínio de cada um não somente nas avaliações, mas dia a dia na sala de aula.

D. Tem muito o que melhorar, alunos aprendemos cada um no seu tempo, precisam ser melhor motivados. Estamos em um momento da vida onde eles não veem nada como algo interessante, só querem coisas práticas, então precisamos mudar de alguma forma para essa geração nova.

E. O processo deve tornar o aluno como protagonista do seu aprendizado e o professor um mediador desse processo.

F. O processo de ensino-aprendizagem eu acredito que seja uma troca constante (por isso até usei a palavra com hífen), em que os alunos e o professor aprendem e ensinam uns aos outros ao mesmo tempo. E que para haver uma boa troca, o professor e os alunos precisam ter um bom relacionamento, e ambiente aconchegante em suas aulas, um bom professor não é aquele que sabe muito, mas sim aquele que consegue fazer com que a sala tenha o mesmo raciocínio que ele. Da mesma forma com que não medimos o aprendizado dos alunos apenas por suas respostas, mas sim também pelo nível de suas perguntas e questionamentos.

G. Prioridade em tornar o aluno como protagonista do seu aprendizado.

H. Sou a favor da concepção construtivista onde o aluno é responsável e efetivo na sua aprendizagem.

I. Que está cada vez mais fraca a aprendizagem e interesse dos estudantes

J. O professor deve estar sempre bem preparado em relação ao conteúdo (apesar de não precisar saber todas as respostas) e também estar com muita disposição e

	paciência. A interação entre professor e aluno no momento da prática é fundamental para que ocorra a aprendizagem.
K.	Processo ultrapassado, falho na concepção e aplicação
L.	Tem muita dificuldade, principalmente agora com a pandemia
M.	Vejo que há uma certa deficiência em alguns colegas quanto a dificuldade em aplicar os conceitos para a prática (notadamente no dia a dia) do estudante. Aplica-se muito a teoria e teoremas, conceitos e definições. Concordo que, para nós, professores de matemática, é algo maravilhoso. Porém, para os estudantes, noto que muitos sentem dificuldade por não compreender.

Fonte: Autoras, 2021.

3.2 PERGUNTA 5 - Quanto às necessidades de mudança e/ou transformação no processo pedagógico das escolas, elenque o que considera como prioridade.

DOCENTE:	**RESPOSTA:**
A.	1- Levar os exercícios de matemática para o dia a dia do aluno. 2- Professores mais qualificados 3- Usar mais a tecnologia na aula
B.	Para mim, mais ensino de matemática, a implementação de um currículo de filosofia/ história da matemática (ou ciências exatas), e uma quantidade menor de alunos por sala - por experiência própria: uma quantidade de até 20 alunos por sala, faz o professor interagir melhor com seus alunos e entender e atender a todos de uma forma muito melhor do que 35 até 50 alunos em sala de aula.
C.	Ao meu ver a mudança mais necessária vem por parte do professor! Na realidade que vivemos onde temos uma distribuição desigual em tantas partes de um mesmo país, vemos professores que dão o máximo que tem, criam com o

pouco que tem e que fazem uma diferença enorme na vida de uma criança! E daí por diante é uma corrente que segue.

D. Mudança na aula do professor, Mudança do material para a realidade do aluno, na infraestrutura nas escolas, mais tecnologia e melhor acesso para os alunos, uma educação menos bancária e menos construtivista.

E. Acabar com a ideia que o processo é o detentor do conhecimento e os alunos vão apenas ouvir.

F. A principal mudança e/ou transformação no processo pedagógico das escolas eu acredito que se divide em três tópicos:
1° - A educação dos pais e alunos, pois os alunos já chegam à escola e são incentivados a terem um pré-conceito formado da matemática antes mesmo de conhece-la, criando assim um bloqueio que prejudica sua evolução.
2° - Professores despreparados e desanimados, a escola precisa incentivar e dar fim aos professores que não estimulam a criatividade e o pensamento computacional. Alunos gostam de se divertir nas aulas, e ao mesmo tempo aprender, o relacionamento/amizade com os professores é muito importante, pois a autoridade do professor deixa de ser algo adquirida pelo medo e sim pelo respeito e admiração.
3° - Quantidade excessiva de conteúdo, principalmente em escolas particulares, decorrente pelo formato dos vestibulares. A grande quantidade de assuntos e conteúdos impossibilita o professor de desenvolver projetos que dure mais que uma semana em qualquer um dos conteúdos desenvolvidos, em média os alunos durante o ano veem entre 20 e 30 conteúdos novos, o que cansa eles e impossibilita projetos mais longos. As escolas deveriam ter conteúdos fundamentais e desenvolvê-los com excelência, fortificando assim a base para desenvolver conteúdos adicionais e mais complexos depois.

G. Mais liberdade para o professor em relação a conteúdo, não se prendendo em seguir o currículo, mas sim nas necessidades de cada sala.

H. Diminuição de alunos por sala e acesso a novas ferramentas e materiais pedagógicos

I. Estrutura, trabalho em equipe, diminuir a sobrecarga, trabalhar a responsabilidade da família no processo de aprendizagem

J. Melhor seleção de conteúdos necessários, para que haja tempo para os alunos se desenvolverem em aspectos realmente importantes.

K. Autonomia do aluno e do professor

L. O acesso para os alunos

M. Interessante mostrar ao aluno a aplicação dos conceitos estudados, notadamente no cotidiano, para que os elementos vistos façam sentido a ele.

Fonte: Autoras, 2021.

3.3 PERGUNTA 6 - Você conhece a metodologia ativa? Se sim, quais seus conhecimentos sobre ela?

DOCENTE: RESPOSTA:

A. Sim, é quando o aluno é protagonista no seu processo de ensino aprendizagem. Uso a aula invertida, sistemas de estações e atividades em grupo

B. Sim, conheço. Vejo que é o que mais será exigido dos professores no presente e no futuro, ainda mais depois da pandemia que, de certa maneira, serviu para mexer com muitos professores.

C. Sim. Colocar em prática a teoria, sair dos livros, dar espaço a dimensão da criatividade e construção de pensamentos. Deixar a criatividade vir de encontro aos alunos.

D. Sim, o aluno sendo protagonista, fazendo parte de seu próprio aprendizado.

E.	Sim, são metodologias que o aluno se torna o protagonista
F.	Conheço em partes, tenho como metodologia ativa, uma forma de avaliar os alunos não apenas por provas e trabalhos e sim por sua evolução de aprendizagem em seus diversos níveis de aptidão. O aluno é protagonista de sua aprendizagem, e o professor deve propor desafios para que o aluno construa o conhecimento a partir de situações problema.
G.	Sim, tornar o aluno como protagonista de seu aprendizado.
H.	Sim, tornar o aluno protagonista de sua aprendizagem. Colocar a mão na massa, através de jogos, experimentos, aula invertida, aluno monitor, entre outras.
I.	Sim, já fiz algumas formações.
J.	Apenas através de algumas palestras. Não foi um conteúdo estudado durante a minha graduação.
K.	Uma maneira diferente de colocar o aluno como agente principal do processo
L.	Aprendizagem Baseada em problemas
M.	De forma resumida, seria a inserção do aluno como agente principal da aprendizagem, o protagonista da sua própria aprendizagem.

Fonte: Autoras, 2021.

3.4 PERGUNTA 7 - Já utilizou a Metodologia Ativa na sala de aula? Se sim, quais foram os resultados?

DOCENTE:	**RESPOSTA:**
A.	Sim, com alunos que tem conhecimento prévio mais sólido foi bem produtivo, mas aqueles que possuem muita defasagem não foi positivo.
B.	Sim, várias vezes. Os resultados são muito variados, visto

que cada turma é diferente, mas o que eu vejo em comum é que os alunos, dependendo da atividade, se entregam muito mais para aprender, se dedicam mais. Mas a aula deve ser muito bem conduzida para que se tenha uma real aprendizagem.

C. Sim. Não em todos os conteúdos, mas o que dá pra colocar no palpável, no visível eu já fiz. Resultados excelentes, alunos bem mais interessados.

D. Às vezes, por utilizar material apostilado temos que cumprir com o conteúdo, sendo somente algumas aulas em que podemos fazer algum jogo ou algo mais dinâmico.

E. Sim, gamificação. Os alunos gostaram muito, se sentem desafiados e aprenderam conceitos facilmente

F. Sim já utilizei no ensino médio e fundamental, os resultados não foram positivos, mas também não foram ruins, pelos motivos citados anteriormente, propor uma nova metodologia aos carece da união de toda a escola e professores, para que vire um costume dos alunos. Como na maioria das vezes a matemática é tratada como indecifrável, quando fiz aulas invertidas, e aprendizado por resolução de problemas, muitas das vezes os alunos apresentavam falas decoradas sem saber do que eles estavam realmente falando e outras desistiam dos exercícios e falavam que matemática é muito difícil. Não construindo assim o conhecimento do conteúdo. Acredito que para a metodologia ativa funcionar em sala de aula, precisamos antes mudar a postura dos alunos e da escola. Os alunos entenderem que o aprendizado não é apenas para passar em provas e a escola identificar quais são seus objetivos: uma aprendizagem significativa de conteúdos bases ou uma aprendizagem superficial de tudo. Acredito que o novo ensino médio venha para causar essa mudança de postura, já que os alunos estão cada vez mais questionadores.

G. Sim, os alunos se tornam mais motivados e o raciocínio crítico e reflexivo melhora consideravelmente.

H. Sim, constantemente. Os resultados são bem melhores

I.	Sim, é útil sem esquecer também o que funciona nos antigos métodos. Utilizo muito de objetos, aula invertida e trabalhos em grupos como metodologia ativa, mas é preciso entender que se precisa também de definições e técnicas.
J.	Acredito que não
K.	O nome é novo, mas é cíclica. De tempos em tempos muda-se o nome, mas as práticas são as mesmas
L.	O aluno desenvolveu autonomia e confiança
M.	Sim. Os resultados foram bem satisfatórios, pois o estudante agindo, de forma ativa (e não passiva, como da maneira tradicional) consegue realizar e absorver melhor os conceitos trabalhados fixando melhor os estudos.

Fonte: Autoras, 2021.

3.5 PERGUNTA 8 - O que você como professor faz para transformar a visão de seus alunos quanto a aprendizagem da Matemática?

DOCENTE:	**RESPOSTA:**
A.	Mostro as aplicações no dia a dia e não complico mais que o necessário
B.	Tento mostrar a importância, primeiramente. Contido, falo com meus alunos o quanto eu gosto de matemática e como ela se relaciona no cotidiano - seja um conceito básico ou avançado, por que os alunos, mesmos conceitos avançados, entendem e assim tem uma visão mais ampla.
C.	Muitos já chegam no 6º ano com um bloqueio e um certo preconceito com a matemática, tento mudar essa percepção. Mostrando que às vezes o jeito que ele entendeu e resolveu tem uma lógica por trás e isso o ajuda a ter mais interesse.
D.	Tentar mostrar que a matemática não é um bicho de sete cabeças e sim, algo totalmente interessante e prazeroso

	de aprender.
E.	Mostrar que a matemática está presente e tudo e que ela pode ser simples
F.	Eu tento em todas as minhas aulas de Física e Matemática mostrar a eles que a matemática, como todas as outras disciplinas são necessárias para a vida, seja para se divertir, trabalhar ou servir a sociedade. Que o sentido não é decorar formulas e resolver vários exercícios, mas entender o processo e avalia-lo, e saber em qual momento da sua vida o usará, ou as vezes, já está usando. E ao tentar fazer isso em todas as minhas aulas mostro a eles como sou fascinado pela matemática, de alguma forma acho que essa energia ajuda a transformar a visão deles. Fora todo aquele clichê de contextualizar e mostrar as aplicações de tudo, coisa que deveria ser normal em todas aulas de matemática.
G.	Tento induzir os alunos a refletirem mais sobre os problemas propostos.
H.	Utilizando ferramentas diversas de aprendizagem e de forma contextualizada com a realidade deles.
I.	Sempre q possível contextualizo e relaciono o q estão aprendendo com o projeto d vida deles.
J.	Tento mostrar aplicabilidades dos conteúdos
K.	Acho que uma boa maneira é mostrar as aplicações no seu cotidiano e em sua vida. Precisa fazer sentido.
L.	Trabalho com atividades lúdicas
M.	Mostrar a importância do domínio dos conceitos matemáticos, como também suas aplicações no dia a dia, na ciência e como ferramenta transformadora de opinião e da sociedade em que ele, estudante, está inserido.

Fonte: Autoras, 2021.

4 Discussão do questionário

Levando em consideração que a pesquisa teve a participação de 13 professores, vemos que 85% deles têm uma postura positivista sobre à metodologia ativa, mesmo alguns deles nunca terem colocado na prática em sala de aula. Reforçando à ideia de que o discente é um agente ativo em sua aprendizagem e que o professor precisa levar em consideração todas às construções feitas pelo aluno. Os outros 15% dos docentes, que apresentam alguma negatividade sobre à aplicação da metodologia, talvez por não terem conhecimento do tema ou tiveram alguma experiência negativa dentro de sala, como foram relatadas em algumas das respostas, ou por motivos variados, como acharem mais válido o uso de outras metodologias para o ensino da matemática.

No processo de ensino e de estímulo para a aprendizagem, o professor também precisa olhar de maneira assertiva para os erros dos alunos, conseguindo tirar proveito para que possam aprender também com os erros. Assim como o Docente C evidenciou em sua resposta na pesquisa: “Mostrando que às vezes o jeito que ele entendeu e resolveu tem uma lógica por trás e isso o ajuda a ter mais interesse.”, ou seja, usar o que o aluno já tem para despertar mais interesse e fazê-lo aprender cada vez mais.

O aluno precisa ser protagonista da sua própria aprendizagem, ao perguntarmos aos professores, o que você faz para mudar a visão de seus alunos quanto a aprendizagem da matemática? A resposta apresentada a seguir, mostra a visão do professor D sobre o assunto:

> Bem, é algo muito particular de cada aluno. Tenho alunos que exercem um protagonismo em sala de aula, ou seja, eles são alunos ativos, que buscam o aprender como uma via de ascensão - pessoal e/ou profissional. Mas não é nesses alunos que podemos ver como está o processo de ensino aprendizagem, e sim nos alunos que não sentem incentivados e muitas vezes se veem "obrigados"

> {..} a estudar, assim é possível notar que o processo é muitas vezes falho com o aluno - seja na escola pública ou particular - já que todos os projetos querem que o aluno esteja mais tempo em sala de aula, mas não se importando com a qualidade e o bem estar do aluno, visa-se um aluno e sua formação integral, mas não apresenta possibilidades reais para esse aluno se formar. (Docente D do Questionário).

Demo (2004, p. 60) define aprendizagem como "processo dinâmico, complexo não linear, de teor autopoiético, hermenêutico, tipicamente interpretativo, fundado na condição de sujeito que participa desconstruindo e reconstruindo conhecimento". Dessa forma, o ato de saber pode ser considerado uma questão de processo de desconstrução e reconstrução do conhecimento. Aprender é o desafio de reconstruir o conhecimento, um processo educacional em que aprendemos a aprender.

Processo de ensino e aprendizagem é definido como um sistema de troca de informações entre professores e discentes, isso deve se basear no objetivo de que os estudantes precisam aprender, não podemos apenas ensinar superficialmente. O ensino, visa a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos, portanto, os docentes precisam ensinar de forma que a aprendizagem mude o pensamento deles. A prática do professor deve ser orientada para fazer o discente refletir, colocando a teoria estudada no dia a dia. Assim como a Docente H da pesquisa mencionou, a utilização de ferramentas diferentes e de forma contextualizada com a realidade do aluno é importante para que o aluno faça parte e sinta que o que está estudando em sala de aula, será importante para o seu processo profissional e pessoal, porque desta forma irá conseguir levar a aprendizagem para a sua vida.

Para Paulo Freire (2015), a educação libertadora ou problematizadora estimula o aluno a participar ativamente na hora de aprender e principalmente a questionar a realidade. É uma maneira de estimulá-los a questionarem o mundo, a pensarem em

soluções, a se entenderem como parte de uma sociedade e a não se conformarem com a realidade, fazendo-os agentes pensantes e transformadores.

Como já vimos anteriormente, o processo de ensino e aprendizagem é realizado de diferentes formas e a função do educador é fazer a diferença na vida do aluno, para que esse possa ser um agente transformador no mundo. O discente, só aprende quando entende o processo de construção do conhecimento. Nesse sentido, o objetivo da metodologia ativa é focar no processo de ensino e aprendizagem, é olhar diretamente para a formação do aluno, ajudando-o em seu processo de desenvolvimento.

> O professor deve estar sempre bem-preparado em relação ao conteúdo (apesar de não precisar saber todas as respostas) e também estar com muita disposição e paciência. A interação entre professor e aluno no momento da prática é fundamental para que ocorra a aprendizagem. (Docente J do Questionário).

Assim, sabemos que o professor tem um papel primordial neste processo em que os alunos adquirem conhecimento de maneiras diferentes e em tempos diferentes. Logo, é necessário orientar os alunos a refletir na prática e alcançar novos horizontes. O docente permite aos alunos alcançar este conhecimento e mediar este processo de aprendizagem até o objetivo do aluno.

O estudante se desenvolve individualmente, mas o aprendizado ocorre das relações estabelecidas da interação e das trocas mútuas. Uma das dificuldades do ensino atual, são as práticas muito tradicionalista dos professores, as mesmas técnicas usadas há anos, em que não levam em consideração a forma de ensino e o processo como um todo.

> O processo de ensino-aprendizagem eu acredito que seja uma troca constante (por isso até usei a palavra com hífen), em que os alunos e o professor aprendem

> e ensinam uns aos outros ao mesmo tempo. E que para haver uma boa troca, o professor e os alunos precisam ter um bom relacionamento, e ambiente aconchegante em suas aulas, um bom professor não é aquele que sabe muito, mas sim aquele que consegue fazer com que a sala tenha o mesmo raciocínio que ele. Da mesma forma com que não medimos o aprendizado dos alunos apenas por suas respostas, mas sim também pelo nível de suas perguntas e questionamentos. (Docente F do Questionário).

Na matemática necessita-se assumir o seu verdadeiro papel no ensino, propiciando um ensino e uma aprendizagem significativa, criativa, prática e contextualizada de acordo com a realidade social do educando. Portanto, é necessário olhar para esse processo, transformando os alunos em construtores do próprio conhecimento.

Segundo D'Ambrósio (1991, p.1), “[...] a matemática que ensinamos tem problemas. O conteúdo que tentamos repassar no sistema escolar é desatualizado, enfadonho e inútil.” Da mesma forma, Nacarato (2009) apontou que muitos professores continuam a "[...] usar os mesmos métodos das décadas anteriores para ministrar aulas de matemática: enfatizando cálculos e algoritmos, faltando compreensão e significado para os alunos; enfocando a aritmética e ignorando outros campos da matemática, como Geometria e Estatística "(NACARATO, 2009, p. 18). As palavras desses autores enfatizam a necessidade de abandonar o tradicionalismo, ou seja, para de tratar a matemática como um assunto que desperta ansiedade e medo nos alunos. Também mostram a urgência de reflexão sobre novas estratégias de ensino que facilitem o processo de ensino, bem como a análise e investigação da prática do professor em sala de aula, seus métodos de ensino e como ele concebe a aprendizagem da matemática.

> Na área da matemática, o processo de ensino e aprendizagem está cada vez mais retroagindo, uma vez que pelos alunos não terem um contato lúdico com a matemática nos anos iniciais - visto por muitos um momento adequado para a formação do aluno - eles carregam para os anos posteriores essa necessidade e, com isso, vejo que os alunos se sentem "mal" por não entenderem conceitos elementares e acabam tachando a matemática como chata, e, quando a matemática é apresentada de forma lúdica, chegam a dizer que é coisa de "criança" (Docente B do Questionário).

Quando o professor explica a matemática salientando seu uso no cotidiano, gera um interesse maior no estudante em aprender o que está sendo apresentado, porque deixa de ser algo abstrato para algo concreto. Por exemplo, quando o docente apenas explica o que é uma função de segundo grau não deixa o aluno interessado, mas quando coloca isso no seu cotidiano, que quando vai jogar uma bola no basquete, o movimento que se realiza é uma parábola e isso é uma função de segundo grau, chama a atenção do aluno para a aula, deixando-o intrigado e curioso.

> Mostrar a importância do domínio dos conceitos matemáticos, como também suas aplicações no dia a dia, na ciência e como ferramenta transformadora de opinião e da sociedade em que ele, estudante, está inserido. (Docente M do Questionário).

Trabalhar com a Metodologia em sala de aula é incentivar os discentes a aprender de forma autônoma e participativa a partir de problemas e situações reais. Os estudantes se desenvolvem de forma diferente e com tempos variados, desta forma, o docente precisa saber guiar a aula de maneira que fique compreensível para todos os estudantes.

> Os resultados são muito variados, visto que cada turma é diferente, mas o que eu vejo em comum é que os alunos, dependendo da atividade, se entregam muito mais para

> aprender, se dedicam mais. Mas a aula deve ser muito bem conduzida para que se tenha uma real aprendizagem. (Docente M do Questionário).

Os métodos positivos de educação inovadora mostram que é possível para os alunos da cultura digital transformarem a sala de aula em uma experiência de aprendizagem mais viva e significativa, com expectativas de ensino, aprendizagem, autodesenvolvimento e formação semelhantes às expressas pelas gerações anteriores. Os alunos que atualmente entram no sistema de educação formal precisam das habilidades dos professores, habilidades de ensino e método, e eles não estão preparados.

5 Considerações Finais

A prática docente baseada em métodos ativos no ensino de conteúdos pode alterar a qualidade e eficácia da aprendizagem e isso precisa ser levado em consideração pelos docentes. A estratégia de ensino da metodologia ativa promove uma aprendizagem significativa e cultiva a capacidade dos alunos de aprender de forma independente. O fato dos alunos se tornarem participantes do processo de aprendizagem mostra que muito se aprende com a realidade.

Voltando à esta questão levantada neste artigo, podemos perceber que que é necessário que os professores de matemática tenham mais formação em relação ao que é a metodologia ativa e como colocá-la na prática em sala de aula, levando em consideração que 85% deles possuem uma postura positivista e um olhar aberto para a metodologia, mas nem todos eles colocaram em prática.

A forma de ensinar deve levar o aluno uma educação mais prazerosa, para que os alunos se motivem e se envolvam com entusiasmo em todas as atividades com níveis de dificuldades diferentes. E o professor tem um papel muito importante para essa

mudança no ensino, pois educar alunos de maneira positiva e criativa permitirá que eles atinjam o ápice do aprendizado. Desta forma, a discussão abordada neste artigo sobre a metodologia ativa, deixa evidente que não é necessário complexidade para aplicação desta metodologia no ensino da matemática, mas os docentes precisam conhecer mais sobre metodologia para colocar em prática, levando mais inovação na sala de aula.

Além disso, é possível ver a importância de envolver os alunos, principalmente por meio de incentivos e desafios. O impacto da aprendizagem não é pelas experiências do professor, e sim por sua própria vivência. Sabendo de todo esse benefício que a metodologia ativa traz para o aluno, o questionário mostra que na prática para se ter qualidade e eficácia na metodologia é necessário recursos, deixando o estudante no centro do processo de aprendizagem.

Observamos assim, utilizando como referência os professores pesquisados, que a matemática pode ser inovadora e que muitos docentes utilizam estratégias da metodologia ativa de maneira a colaborar para a construção do conhecimento matemático dos alunos. As discussões, buscam traçar novas perspectivas da utilização da metodologia, tendo em vista que o professor possui grande influência sobre seus alunos, com isso é evidente a importâncias de olhar para o processo de aprendizagem como um todo.

Pode-se concluir então, que realizar uma prática pedagógica baseada em metodologias ativas no ensino de um conteúdo pode transformar a qualidade e a eficácia do ensino-aprendizagem. A metodologia ativa pode facilitar a aprendizagem significativa e independente. O fato dos alunos se tornarem participantes do processo de aprendizagem mostra que se aprende muito a partir da realidade.

Referências

3 EXEMPLOS PRÁTICOS DE METODOLOGIAS ATIVAS. Disponível em: https://gutennews.com.br/blog/2018/07/05/3-exemplos-praticos-de-metodologias-ativas/. Acesso em: 03 de julho de 2020.

ABREU, José Ricardo Pinto de. Contexto Atual do Ensino Médio: Metodologias Tradicionais e Ativas - Necessidades Pedagógicas dos Professores e da Estrutura das Escolas. 2011. 105 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ciências da Saúde) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

ALVES, Rubem. A alegria de ensinar. Campinas: São Paulo. Papirus,2012.

ALVES, Rubem. Ao professor, com o meu carinho. Campinas: São Paulo. Versus Editora, 2004.

BARROS, A. J. P.; LEHFELD N. A. S. Fundamentos de metodologia: um guia para iniciação cientifica. São Paulo: McGraw-Hill, 1986.

CARVALHO, Anabela. Pedagogia, Didactica e metodologia. Disponível em: https://ciberduvidas.iscte-iul.pt/consultorio/perguntas/pedagogia-didactica-e-metodologia/25023/. Acesso em 18/03/2021 às 09:15.

COMENIUS, Juam A., Didactica Magna. Editora Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. 13p Como As Metodologias Ativas Favorecem O Aprendizado. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/11897/como-as-metodologias-ativas-favorecem-o-aprendizado. Acesso em: 07 de julho de 2020.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Matemática, ensino e educação: uma proposta global. Temas & Debates: SBEM, São Paulo, 1991.

DEMO, Pedro. Aprendizagem no Brasil: ainda muito por fazer. Porto Alegre: Mediação, 2004.

Dicionário Online de Português. Disponível em: https://www.dicio.com.br/metodologia/Acesso em: 18/032021 às 09:13

FERREIRA, Viviane Lovatti e SANTOS, Vinicio de Macedo. O processo histórico de disciplinarização da Metodologia do Ensino de Matemática. Bolema: Boletim de Educação Matemática [online]. 2012, v. 26, n. 42a [Acesso em: 02 de outubro de 2021] , pp. 163-192. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100009.

FEYNMAN, Richard. "O que é uma lei física?",Col. Ciência Aberta, editora Gradiva, 1989] , disponível em :https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/nonius/nonius23_3.html.

FILATRO, Andrea; CAVALCANTE, Carolina Costa. Metodologias Inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. 51. ed. Rio de Janeiro: Paz e terra, 2015.

Metodologias Ativas: Como Essa Tendência Pode Beneficiar As Práticas Pedagógicas? Disponível em: https://www.somospar.com.br/metodologias-ativas-como-essa-tendencia-pode-beneficiar-as-praticas-pedagogicas/. Acesso em: 31 de agosto de 2020.

MORAIS, Cleyson Mello de; PENTAGNA, Regina Petrillo; ALMEIDA, Rogério Neto de. Metodologias ativas: desafios contemporâneos e aprendizagem transformadora. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 2019.

MORAN, José; BACICH, Lilian. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

MOREIRA, M. A. A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

NACARATO, A.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PIAGET, Jean. Para onde vai a educação? Rio de Janeiro: José Olympio, 1977.

RODRIGUES, A., VIEL, S., SILVA, B. Metodologia Ativa no Ensino de Matemática, Franca, revista em impressão, 2021. Edição

SMOLE, K.S. Escola para crianças de 4 a 6 anos. Brasília: Cisbrasil,2008.

Westbrook, Robert B., John Dewey/ Robert B. Westbrook; Anísio Teixeira, José Eustáquio Romão, Verone Lane Rodrigues (org.) Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. (Coleção educadores).

POSSÍVEIS CORRELAÇÕES ENTRE MULTIFRACTALIDADE, VOLATILIDADE E PREVISÕES EM SÉRIE TEMPORAIS FINANCEIRAS

Rodrigo Silva Ribeiro
Licenciando em Matemática – Uni-FACEF
rodigo.1824@gmail.com

Dr. Antônio Carlos da Silva Filho
Doutor em Física - Uni-FACEF
acdasf@bol.com.br

1 Introdução

Sabe-se que empresas se tornam bem sucedidas justamente por não evitar completamente o risco, mas detectando-o e explorando-o em proveito próprio. O vinculo entre risco e recompensa motiva a tomada de riscos ao longo da história e uma empresa que decide se proteger de qualquer tipo de risco provavelmente não gerará lucro para os seus acionistas. Uma das formas de detectar e explorar o risco é conhecendo e analisando as oscilações do ativo ou do grupo de ativos que se tem. No mercado financeiro, na maioria das vezes o risco é medido pelo grau de variabilidade dos retornos do investimento, ou seja, quanto maior as possíveis oscilações, maior será o risco do ativo.

Com a evolução dos estudos sobre o comportamento das séries temporais financeiras, surgiu uma nova abordagem chamada geometria dos fractais. Os primeiros passos sobre o tema foram desenvolvidos por um matemático polonês chamado Benoît Mandelbrot (MANDELBROT, 1975).

O termo “fractal” foi criado a partir do adjetivo latino fractus do verbo frangere, que significada quebrar.Quando se fala em geometria fractal, é afirmado que todos os objetos, fenômenos,teorias e significados complexos podem ser reduzidos, ou seja, dimensionados em unidades menores, a fim de explicá-

los de forma mais simples. Essa ideia de dimensionar objeto em unidades menores foi aplicada inicialmente na geometria, sendo um avanço em relação á geometria eucladiana. Tal concepção visava mostrar que as coisas podem ser vistas em escalas cada vez menores, aumentando os detalhes e melhorando sua visualização.

O comportamento de escala fractal foi observado em muitas áreas como: física experimental, geofísica, fisiologia e até mesmo nas ciências sociais. No entanto, sabe-se que a maioria das bases de dados geradas na natureza e nas ciências sociais, como por exemplo, nos mercados financeiros, são sistemas complexos, que não estão em equilibrio, assim não seria possível explicar seu comportamento através de um único expoente de escala. Isso porque quando se tem uma base de dados gerada por um sistema complexo, na maioria das vezes, encontramos dados em situações de desequilíbrio, que seguem relações de escala em várias ordens de grandeza. Essas relações permitem uma caracterização dos dados e do complexos gerador dessa série por expoentes de escala fractal ou multifractal, que podem servir como características para comparações com outros sistemas e modelos.

Em muitos casos, o comportamento de escala pode ser observado por muitos subconjuntos de fractais entrelaçados na série de tempo. Assim, séra necessário uma multidão de expoentes de escala para uma descrição completa do comportamento da série e esse comportamento é denominado multifractal. O comportamento de escala multifractal foi observado pela primeira vez por Mandelbrot em seu livro “ Les Objets Fractals: forme, hasard et dimension” (MANDELBROT, 1975) e confirmada por Mantegna e Stanley (1996); após essa data, vários autores testaram tal comportamento em várias áreas do conhecimento e constataram a existência de multifractalidade em várias séries de tempo e sua aplicação se deu com sucesso no mercado financeiro e nas séries encontradas na natureza.

Para o mercado de ações, vários autores como: Turiel e

Perez-Vicente (2003), Turiel e Perez-Vicente (2005), Oświęcimka et al. (2005), Kwapień et al. (2005), Norouzzadeh e Jafari (2005), Su, Wang e Huang (2009), Wang, Liu e Gu (2009), Dutta (2010), Benbachir e Alaoui (2011), Cajueiro, Gogas e Tabak (2009), Dutta, Ghosh e Chatterjee (2016), Grech (2016) e Maganini et al. (2018), concluíram que as ações e índices de vários mercados possuem características multifractais, inclusive o mercado brasileiro. Entender se uma série financeira possui ou não características de multifractalidade é interessante porque pode auxiliar usuários a modelar sua volatilidade.

Lux, Morales-Arias e Sattarhoff (2014) afirmam que modelar a volatilidade de séries temporais é de fundamental importância tanto para os profissionais de finanças como para os acadêmicos, porque permite desenvolver modelos aplicáveis para a gestão de riscos, precificação de ativos e alocação de uma carteira.

2 O método MFDFA

Os estudos sobre multifractais foram inicialmente pensados por Mandelbrot no ano de 1975 em seu livro intitulado “Les Objets Fractals: forme, hasard et dimension” (MANDELBROT, 1975). Neste livro o autor entende que muitas séries analisadas na natureza não podem ser explicadas através de um único expoente de escala e afirma que há evidências de multifractalidade para vários casos. Stanley et al. (1996) analisam a dinâmica do tamanho das empresas, tendo como diferencial do trabalho a análise dos dados ao longo de muitas escalas de tempo, em vez de apenas um único intervalo de tempo e Mandelbrot afirma que a análise multifractal é um novo tipo de prospecção de dados para analisar os ativos financeiros.

Com o passar do tempo foram criados vários modelos para se analisar as propriedades multifractais para séries temporais. Os mais utilizados são: o método Multifractal Detrended Fluctuation

Analysis, que é uma generalização do método DFA, idelizado por Kantelhardt et al (2002).

A metodologia do MFDFA fez-se presente nos últimos anos de maneira determinante na área de econofísica, através, por exemplo, dos trabalhos de Wang, Liu e Gu (2009), Zunino et al. (2009), Zunino et al. (2008), Oswiecimka et al. (2006), Ying, Xin-Tian e Xiu (2009), Oswiecimka et al. (2005), Matia, Ashkenazy e Stanley (2003). O método descrito foi largamente utilizado na literatura para análise. Segue-se uma exposição do algoritmo descrito originalmente por Kantelhardt [KANTELHARDT et al., 2002] e largamente utilizado na literatura.

Este algoritmo compreende seis etapas. Considere-se x_k uma série temporal de comprimento N e com suporte compacto, ou seja, $x_k=0$ somente para uma fração insignificante de valores.

Primeira etapa: Determina-se o "perfil" Y:

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^{i} [x_k - \langle x \rangle], i = 1, \ldots, N. \quad (1)$$

Segunda etapa: Divide-se o perfil $Y(i)$ em $N_s \equiv \int (N/s)$ segmentos de comprimento s não superpostos. Frequentemente, o comprimento N das series normalmente não é um múltiplo da escala s considerada e sobrará, inevitavelmente, uma pequena porção ao final. Para não desconsiderar esta pequena porção da série, repete-se o mesmo procedimento, mas começando do final para o início da série (na ordem inversa, portanto), ou, o que é equivalente, começando do ponto $m+1$, onde m é o resto da divisão de N por s. Assim, são obtidos $2N_s$ segmentos no total.

Terceira etapa: Calcula-se a tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos por uma regressão, usando o método dos mínimos quadrados. Após isso, determina-se a variância:

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (2)$$

Para cada segmento $v,v=1,...,N_s$ and

$$F^2(s,v) \equiv \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\{Y[N-(v-N_s)s+i]-y_v(i)\}^2 \quad (3)$$

Para $v=N_s+1,...,2N_s$. Aqui, $y_v\,(i)$ é o polinômio ajustado para o segmento v.

Quarta etapa: Realiza-se a média sobre todos os segmentos com o propósito de obter a função de flutuação de q-ésima ordem:

$$F_q(s) \equiv \left\{\frac{1}{2N_s}\sum_{v=1}^{2N_s}[F^2(s,v)]^{q/2}\right\}^{1/q} \quad (4)$$

Neste ponto, a variável "q" pode ter qualquer valor, exceto zero. As etapas 2 a 4 ser repetidas para diferentes escalas de tempo s.

Quinta etapa: Determina-se o comportamento de escala da função de flutuação através da análise de gráficos log-log de $F_q\,(s)$ contra s, para cada valor de q (pois já é conhecido que fenômenos com invariância de escala obedecem a uma lei de potência [MANDELBROT, 1998].

$$F_q\,(s) \sim s^{h(q)} \quad (5)$$

A função $h(q)$ é conhecida como Expoente de Hurst Generalizado e tem um papel central no estudo da multifractalidade.

Sexta etapa: Eq. (5) pode ser escrita como $F_q\,(s)=AS^{h(q)}$, a partir da qual, tirando-se logaritmos dos dois lados, deduz-se que:

$$logF_q\,(s)=logA+h(q)logs \quad (6)$$

Obtendo-se, assim, o valor do Expoente de Hurst Generalizado.

Sabemos que as séries temporais monofractais são caracterizadas por um único expoente de escala. Desta maneira, espera-se que o Expoente de Hurst Generalizado, h(q), seja independente de q. Esta diferença é o fundamento para a distinção entre os dois tipos de comportamento neste método: $h(q)$ não varia com q para as series monofractais; porém, varia com q para as series multifractais. Este fato está embasdo em que os diferentes fatores de escala para pequenas e grandes flutuações produzirão uma significativa dependência de $h(q)$ em função de q. Estas diferenças são diferentes para diferentes valores de q: os valores de q's positivos e os valores de q's negativos. Assim, para valores de q positivos, $h(q)$ descreve o comportamento de escala dos segmentos com grandes flutuações, enquanto que para valores de q negativos, os expoentes de escala $h(q)$ descrevem o comportamento de escala para segmentos com pequenas flutuações.

Desta maneira, o método mais aceito pela comunidade científica para confirmar a multifractalidade nas series temporais é através da análise do seu espectro. Entende-se por espectro o conjunto dos valores para $h(q)$ ou para $\alpha(a)$, onde $\alpha(q)$ é obtido a partir de $h(q)$ por uma transformação. Tal análise é baseada na relação entre o Expoente de Hurst Generalizado, $h(q)$, e o Expoente de Renyi, $\tau(q)$ [GREEN et al., 2014] dada a seguir:

$$\tau(q)=qh(q)-1-q(h(1)-1) \tag{7}$$

Deduz-se da equação (7), fazendo-se uma transformação de Legendre:

$$\alpha = \frac{d}{dq}\tau(q) \text{ e } f(\alpha) = \alpha(q)\, q - \tau(q) \tag{8}$$

Fazendo uso da Equação 6, define-se o grau de

multifractalidade Δh como:

$$\Delta h = \max[h(q)] - \min[h(q)] \quad (9)$$

Uma medida alternativa do grau de multifractalidade pode ser obtida usando a Equação 8:

$$\Delta \alpha = \max[\alpha] - \min[\alpha] \quad (10)$$

3 Dados

Foram utilizadas três séries de ações negociadas no mercado brasileiro: Vale do Rio Doce (VALE5), Itaú/Unibanco (ITUB4) e Bradesco (BBDC4), além do índice IBOVESPA. Todas as quatro séries abrangem o período que vai de janeiro de 1998 a maio de 2015, perfazendo um total cada uma de 4.308 dados. Para os cálculos foram utilizados os retornos destas séries, r(t), definidos como $r(t) = \ln[x(t)] - \ln[x(t-1)]$. Os gráficos destas séries (e dos seus retornos) estão exibidos na seção de resultados.

4 Resultados

Os gráficos das quatro séries e os seus respectivos retornos estão colocados nas figuras 1 a 8 a seguir.

Figura 1 – Série temporal do IBOVESPA

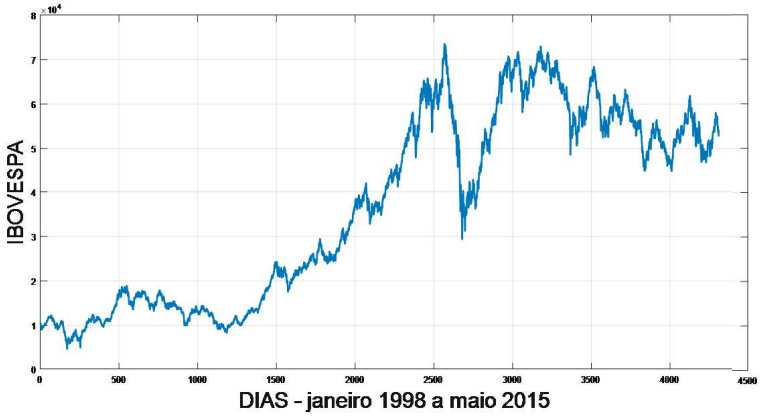


Figura 2 – Série temporal dos retornos do IBOVESPA

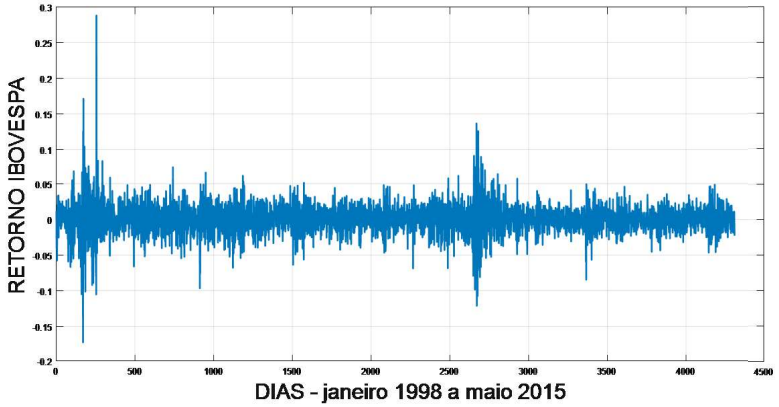


Figura 3 – Série temporal do BBDC4



Figura 4 – Série temporal dos retornos do BBDC4

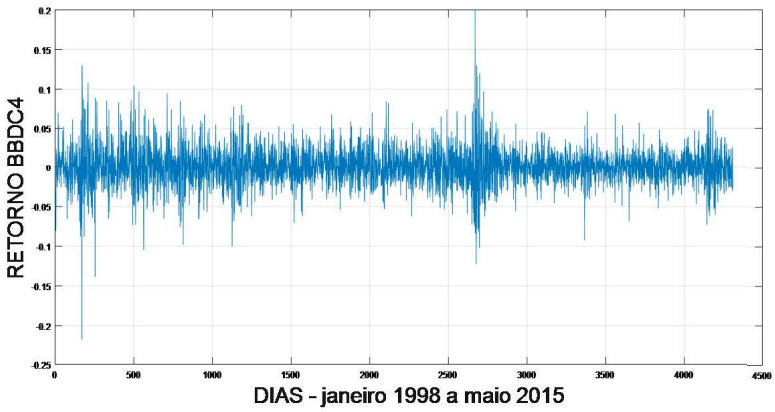


Figura 5 – Série temporal da VALE5



Figura 6 – Série temporal dos retornos da VALE5

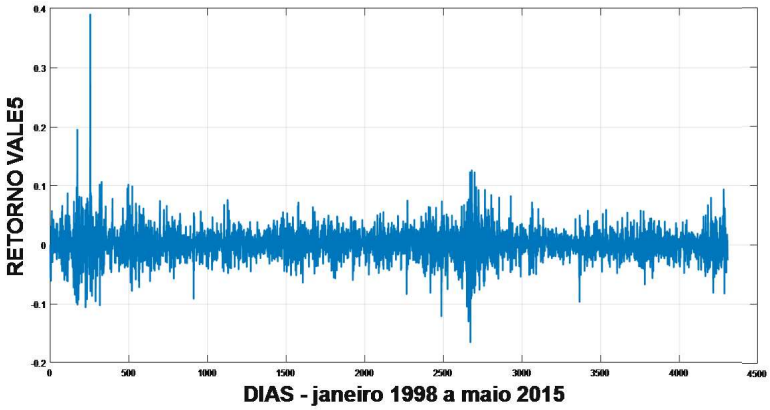
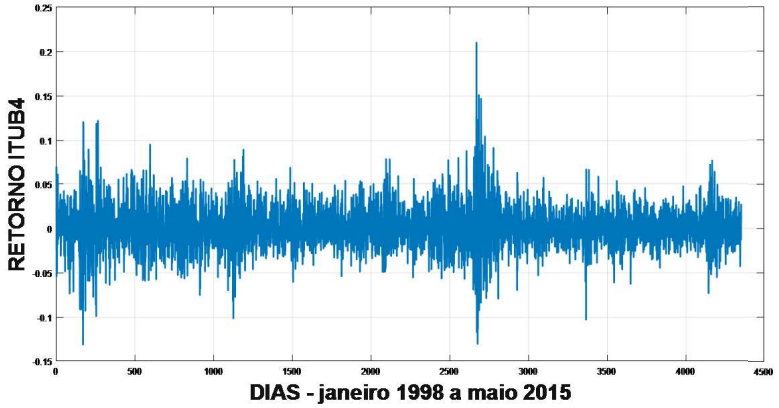


Figura 7 – Série temporal do ITUB4

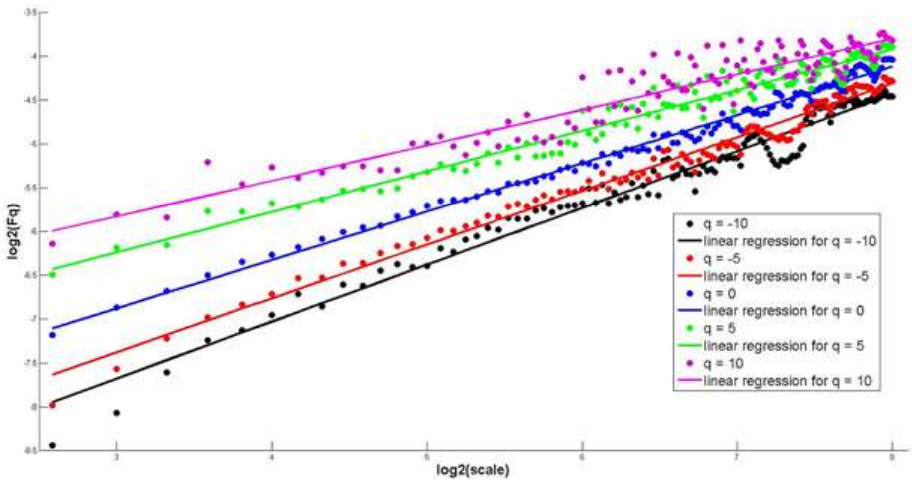


Figura 8 – Série temporal dos retornos do ITUB4



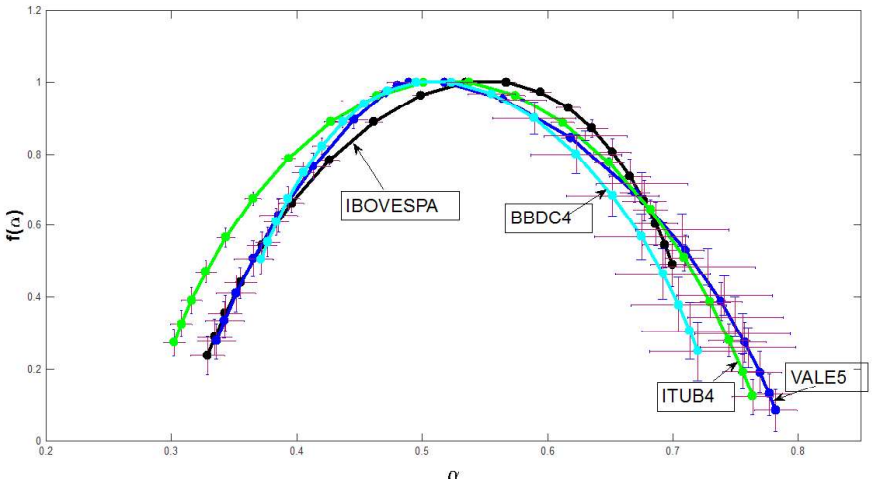
Um exemplo da análise de tendência das funções Fq, para a série do IBOVESPA, está na figura 9 a seguir:

Figura 9 – logaritmo de Fq em função da escala



Um gráfico para exemplificar o cálculo do parâmetro multifractal Δα está colocado (com barras de erro nos pontos) na figura 10 a seguir:

Figura 10 – Espectro Multifractal dos retornos dos índices analisados (f(α) x α).



A tabela 1 a seguir mostra os valores de α e Δα para as séries analisadas:

Tabela 1 - Índice de Multifractalidade para os retornos dos índices analisados

	α max	α min	Δα
Ibovespa	0,6995 (0.0174)	0,3288 (0.0138)	0,3707 (0.0312)
VALE5	0,7821 (0.0168)	0,3358 (0.0153)	0,4463 (0.0321)
ITUB4	0,7636 (0.0164)	0,3021 (0.0089)	0,4615 (0.0253)
BBDC4	0,7199 (0.0382)	0,3715 (0.0097)	0,3484 (0.0479)

Nota: Entre parênteses estão os devios-padrões. Para Δα a soma dos desvios-padrões de max(α) and min(α) estão em parênteses.

Sabe-se que a volatilidade é uma medida das flutuações de um ativo ou índice. Mas se este ativo ou índice apresenta grandes flutuações, isto não permite que se façam boas previsões sobre o seu comportamento. Quanto mais difícil de se fazer estas previsões, maior é o risco que este ativo ou índice apresenta ao investidor. Assim, uma medida para este risco é a volatilidade. A literatura em finanças apresenta várias medidas da volatilidade, mas usaremos aqui os retornos absolutos, como feito, por exemplo, em Ding et al. (1993). Os retornos absolutos, aqui denotados por *r(t)*, são definidos por:

$$r(t) = \left| ln \frac{x_i}{x_{i-1}} \right|$$

Vários trabalhos usam esta definição (ZUNINO et al., 2009). Como estamos interessados na medida do risco para um intervalo no tempo e esta medida de volatilidade é pontual, faremos uma média dos valores individuais da volatilidade correspondentes ao intervalo considerado. A seguir, vamos analisar se existe alguma correlação entre o grau de multifractalidade e as volatilidades.

Usaremos janelas com 1.000 valores de dados em cada uma e com uma distância de 50 valores entre duas janelas adjacentes, dando, nestes casos, um total de 59 janelas. Os resultados estão colocados nas Figuras 11-14 a seguir:

Figura 11 – Volatilidade para o Ibovespa, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de Δα em duas regiões.

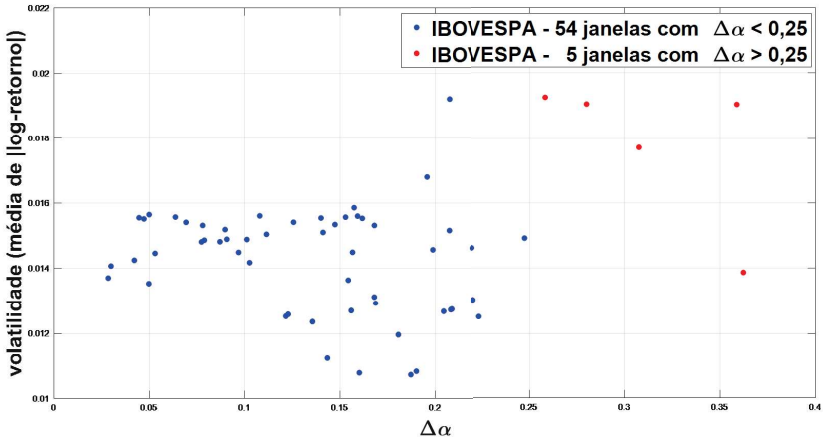


Figura 12 – Volatilidade para a VALE5, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de Δα em duas regiões.

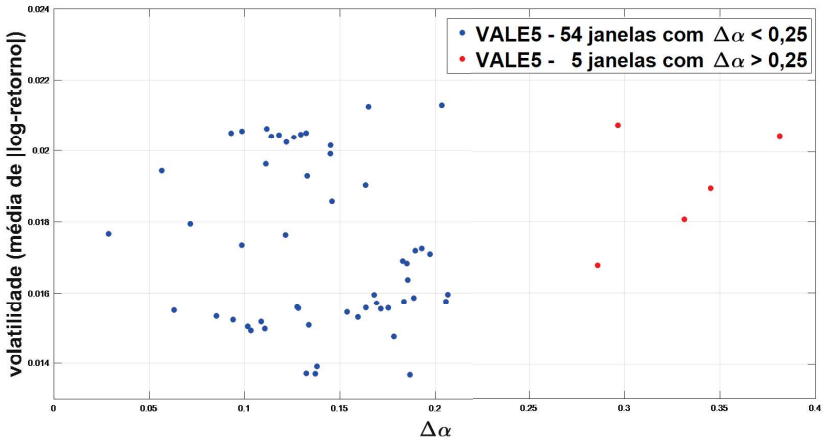


Figura 13 – Volatilidade para a ITUB4, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de Δα em duas regiões.

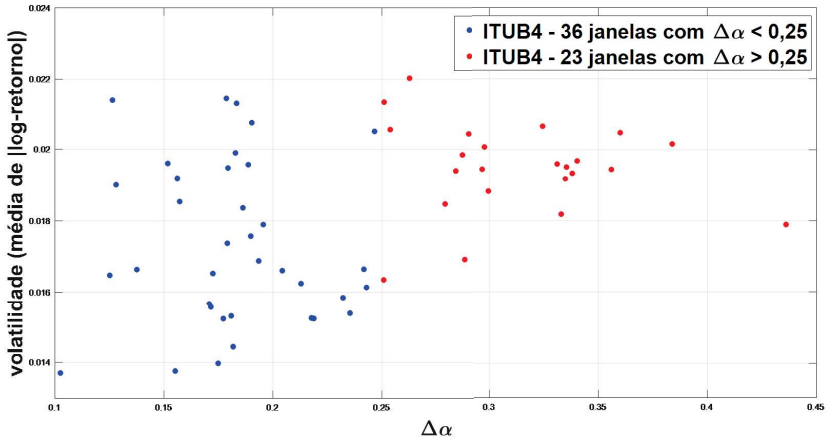
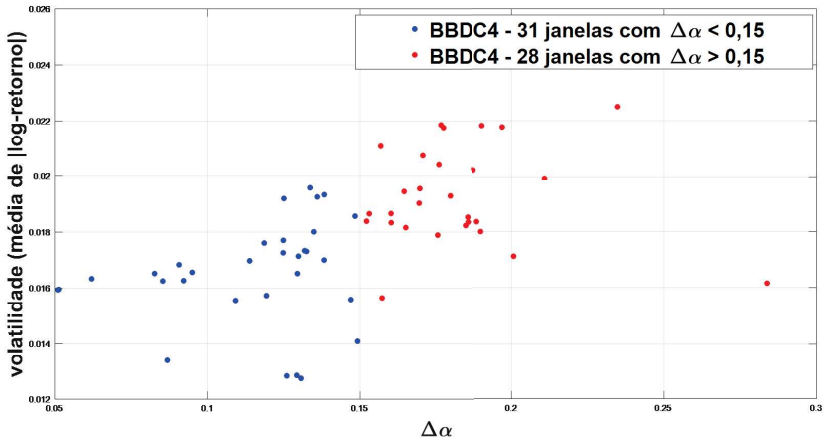


Figura 14 – Volatilidade para a BBDC4, medida como a média dos valores absolutos dos log-retornos para janelas móveis, dividindo os valores de Δα em duas regiões.



Estas figuras exibem os resultados dividindo o gráfico em duas regiões. Nos casos de Ibovespa, VALE5 e ITUB4, o ponto de corte (arbitrário) foi o de Δα = 0,25 e no caso do BBDC4 o ponto de corte foi o de Δα = 0,15. Acima destes valores, a volatilidade é mais alta, indicando, então, maior risco e menor confiança nas previsões.

5 Análise e Conclusão

Obtivemos os parâmetros multifractais para as quatro séries de índices analisados e calculamos a volatilidade para janelas móveis adjacentes para cada um dos quatro ativos. Encontramos que a partir de determinado valor (valor este que depende do ativo) de $\Delta\alpha$ a volatilidade é mais alta, indicando que o grau de multifractalidade pode, sim, ser um indicador tanto da volatilidade quanto do risco associado a um determinado ativo.

Referências

BENBACHIR, S., ALAOUI, M. E.. A multifractal detrended fluctuation analysis of the Moroccan stock exchange. *International Research Journal of Finance and Economics*, v. 78, p.6-15, 2011.

CAJUEIRO, D. O., GOGAS, P., TABAK, B. M.. Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of the Athens stock exchange. *International Review of Financial Analysis*, v.18, p.50-57, 2009.

DA SILVA FILHO, A. C.; MAGANINI, N. D.; ALMEIDA, E. F. Multifractal Analysis of Bitcoin Market. *Physica A*, v. 512, p. 954-967, 2018.

DAMODARAN, A. Gestão Estratégica do risco: uma referência para a tomada de riscos empresariais. Tradução: Félix Nonnenmacher. Porto Alegre: *Bookman*, 384p. 2009.

DING, Z., GRANGER, C., ENGLE, R. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, vol. 1, p. 83-106, 1993.

DUTTA, S.. Multifractal detrended fluctuation analysis of SENSEX fluctuation in the Indian Stock Market. *Canadian Journal of Physics*, v. 88, p.545-551, 2010.

DUTTA, S., GHOSH, D., Chatterjee, S.. Multifractal detrended cross correlation analysis of foreign exchange and SENSEX fluctuation in Indian perspective. *Physica A*, v. 463, p.188-201, 2016.

GRECH, D.. Alternative measure of multifractal content and its application in finance. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 88, p.183-

195, 2016.

LUX, T, MORALES-ARIAS, L., SATTARHOFF, C. Forecasting Daily Variations of Stock Index Returns with a Multifractal Model of Realized Volatility. *Journal of Forecasting*, v. 33, n. 7, p.532-541, 2014.

KANTELHARD, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN S.; BUNDE A.; STANLEY, H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*. v. 316. p 1-18. 2002.

KWAPIEN, J., OSWIECIMKA, P., DROZDZ, S.. Components of multifractality in high-frequency stock returns. *Physica A*, v. 350, p.466-474, 2005.

LUX, T.; MORALES-ARIAS, L.; SATTARHOFF, C. Forecasting Daily Variations of Stock Index Returns with a Multifractal Model of Realized Volatility. *Journal of Forecasting*, v. 33, p.532-541, 2014.

MAGANINI, N. D., DA SILVA FILHO, A. C. e LIMA, F. G. Investigation of multifractality in the Brazilian stock market. *Physica A*, v. 497, p. 458-471, 2018.

MANDELBROT, B. Les Objets Fractals: forme, hazard et dimension. 2ed. *Paris: Flammarion*, 190p. 1975.

MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 59 pp. 394-419, 1963.

MANDELBROT, B. The variation of some other speculative prices. *The Journal of Business*. 40 (4), pp. 393-413. 1967.

MANDELBROT, B. Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk. *New Haven: Springer*. 1997.

MANDELBROT, B. A multifractal walk down wall street. *Scientific American*. v.298, p.70-73. 1999.

MANTEGNA R. N.; STANLEY, H. E. Turbulence and financial markets. *Nature*, v.383, p.587-588, 1996.

OSWIECIMKA, P., KWAPIEN, J., DROZDZ, S., RAK, R.. Investigating multifractality of stock market fluctuations using wavelet and detrending fluctuation methods. *Acta Physica Polonica B* v. 36, p.2447-2457, 2005.

STANLEY, M. H. R.; AMARAL, L. A. N.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LESCHHORN H.; MAASS, P.; SALINGER, M. A.; STANLEY,

E. Can statistical physics contribute to the science of economics?. *Fractals*, v.4, n.3, p.415-425, 1996.

SU, Z. Y.; WANG, Y. T.; HUANG, H. Y. A Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Taiwan´s Stock Exchange. *Journal of the Korean Physical Society*, v.54, n. 4, p. 1395-1402, 2009.

TURIEL, A.; PÉREZ-VICENTE, C. J. Multifractal geometry in stock Market time series. *Physica A*, v.322, p. 629-649, 2003.

TURIEL, A.; PÉREZ-VICENTE, C. J. Role of multifractal sources in the analysis of stock Market time series. *Physica A*, v. 355, p. 475-496, 2005.

WANG, Y.; LIU, L.; GU, R. Analysis of efficiency for Shenzhen stock market based on multifractal detrended fluctuation analysis. *International Review of Financial Analysis*, v.18, p. 271-275. 2009.

YING, Y.; XIN-TIAN, Z.; XIU, J. Measuring multifractality of stock price fluctuation using multifractal detrended fluctuation analysis. *Physica A*, v. 388, p. 2189-2197. 2009.

ZUNINO, L.; TABAK, B. M.; FIGLIOLA, A.; PÉREZ, D. G.; GARAVAGLIA, M.; ROSSO, O. A. A multifractal approach for stock Market inefficiency. *Physica A*, n. 387, p. 6558-6566, 2008.

ZUNINO, L.; FIGLIOLA, A.; TABAK, B. M.; PÉREZ, D. G.; GARAVAGLIA, M.; ROSSO, O. A. Multifractal structure in Latin-American Market índices. *Chaos, Solitons and Fractals*, v.41, p. 2331-2340, 2009.

https://congressousp.fipecafi.org/anais/17UspInternational/ArtigosDownload/478.pdf - visualizado em 26/10/2021